I

INTRODUCCIÓN al estudio de funciones de una variable real

JOSÉ DE JESÚS GUTIÉRREZ RAMÍREZ

$$\{f(x_n)\}=\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{3\pi}}\right),\right.$$

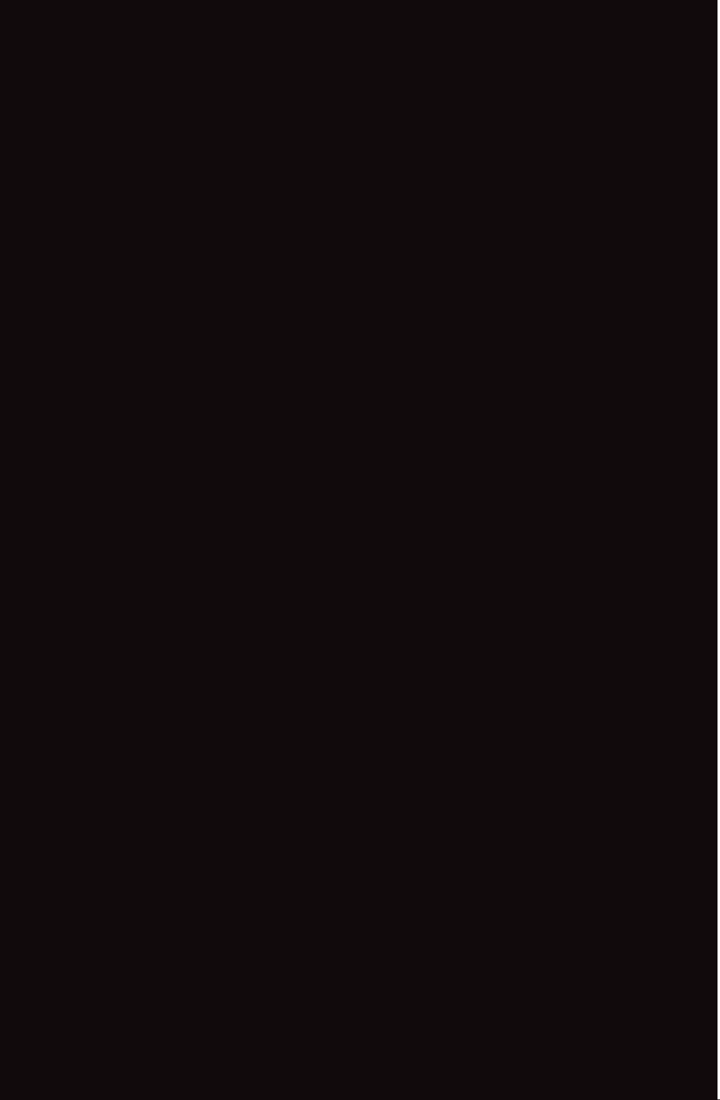
$$\left.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}}\right),\ldots,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right),\ldots\right\}$$

$$\{f(x_n)\}=\left\{\operatorname{sen}(\pi),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right),\operatorname{sen}(2\pi),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right),\operatorname{sen}(3\pi),\right.$$

$$\left.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right),\ldots,\operatorname{sen}(n\pi),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),\ldots\right\}$$

$$\{f(x_n)\}=\{0,1,0,1,0,1\ldots,0,1,\ldots\}$$

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades



INTRODUCCIÓN al estudio de funciones de una variable real

JOSÉ DE JESÚS GUTIÉRREZ RAMÍREZ

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO División de Ciencias Sociales y Humanidades

Primera edición: octubre de 2020

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso 1100
Colonia Villa Quietud, Alcaldía Coyoacán
04960 Ciudad de México

Sección de Publicaciones
División de Ciencias Sociales y Humanidades
Edificio A, tercer piso
Teléfono: 55 5483 7060
pubcsh@gmail.com/pubcsh@correo.xoc.uam.mx
http://dcsh.xoc.uam.mx
http://www.casadelibrosabiertos.uam.mx

ISBN: 978-607-28-2054-8

Agradecemos a la Rectoría de Unidad el apoyo recibido para la publicación.

Esta obra de la División de Ciencias Sociales y Humanidades
de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco,
fue dictaminada por pares académicos externos especialistas en el tema.

Impreso en México / Printed in México

A la memoria de mi madre, Esperanza Ramírez Rojas

A mi esposa Ivone, con todo mi amor

Luego ¿conocístela tú? —dijo Don Quijote. No la conocí yo —respondió Sancho—; pero quien me contó este cuento me dijo que era tan cierto y verdadero, que podía bien, cuando lo contase a otro, afirmar y jurar que lo había visto todo.

Miguel de Cervantes Saavedra
El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha

Índice

Introducción 11

I. Funciones 15
Funciones de una variable real 16
Igualdad entre funciones 29
Operaciones con funciones 33
Composición de funciones 39
Funciones inyectivas y supreyectivas 47
Funciones monótonas 62
Funciones acotadas 86

II. Límites 95
Definición básica de límite 97
Límites y sucesiones 122
Operaciones con límites 134
Límites laterales 149

III. Continuidad 165
Continuidad en un punto 166
Continuidad y sucesiones 181
Operaciones con funciones continuas 191
Continuidad y límites laterales 202

IV. Teoremas sobre funciones continuas 213

Bibliografía 233

Glosario de símbolos 235

Introducción

El presente libro contiene los temas básicos sobre funciones de una variable real, considerando que ya se conocen las propiedades y los resultados más importantes sobre números reales y sucesiones. Los contenidos expuestos representan un inicio fundamental para el estudio del cálculo desde un punto de vista avanzado, dichos temas aparecen, necesariamente, en cualquier otro texto sobre fundamentos de cálculo.

La intención de esta obra es presentar los resultados básicos sobre funciones de una variable real, donde se haga explícita la metodología en la presentación y desarrollo de los contenidos y las demostraciones que emergen de los planteamientos. Esta introducción al estudio de funciones se dirige a estudiantes de los primeros semestres de Matemáticas o Física, y también de posgrado en diferentes ramas de la ingeniería, Economía o Administración, cuyos programas de estudio exigen un manejo de métodos cuantitativos en un nivel avanzado.

¿Qué persigue este libro?

Presentar y desarrollar la metodología con la que se trabaja para la elaboración de pruebas en matemáticas

A lo largo del texto, antes de iniciar las pruebas formales de las afirmaciones, se hacen breves introducciones a partir de situaciones concretas, cálculo numérico y representaciones gráficas sobre comportamientos que se enunciarán de manera más precisa mediante definiciones, teoremas, lemas o afirmaciones en general; se continúa con la elaboración de las pruebas a través de preguntas y respuestas, partiendo de la tesis de manera regresiva, o bien de las hipótesis de forma progresiva, también planteando preguntas y respondiéndolas. El objetivo es lograr construir cadenas de razonamiento que lleven al lector de las hipótesis a la tesis por medio de un texto sólido que se va construyendo, esto es, que no se presenta de manera acabada desde el principio. Así mismo, el tipo de pruebas que se desarrollan contienen técnicas directas o por contradicción, siempre a partir de preguntas y respuestas.

Si el lector desea conocer más detalladamente acerca de la metodología con la que se abordaron las demostraciones de esta obra, puede revisar el texto de Daniel Solow titulado *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas* (México, Limusa, 1993). Solow hace explícito el método con el que se procede en matemáticas para la elaboración de una prueba, en este sentido, el presente libro busca que la herramienta metodológica aparezca casi a la par de los contenidos que se exponen lo más explícitamente posible.

Presentar y desarrollar los resultados preliminares sobre funciones para el estudio del cálculo de una variable real

Los resultados básicos sobre funciones de variable real, en la actualidad, se encuentran desarrollados en casi todos los libros de texto sobre cálculo. En esta obra se han agrupado en cuatro capítulos: I Funciones, II Límites, III Continuidad y IV Teoremas sobre funciones continuas. En el primer capítulo empieza con la definición de función y dominio, operaciones entre funciones, suma, producto y cociente, y con la composición entre funciones, teniéndose cuidado en las definiciones de los dominios. Más adelante se estudia lo que es: 1) una función inyectiva, o sea, cuando una función asocia a números diferentes imágenes diferentes; 2) una función suprayectiva, es decir, cuando para un subconjunto de números reales se tiene que éstos son imágenes de ciertos elementos del dominio de la función; 3) una función biyectiva, o sea, cuando una función es inyectiva y sobreyectiva; 4) la monotonicidad de una función, esto es, cuando una función es creciente, decreciente, no creciente o no decreciente en ciertos subconjuntos de números reales; y 5) una función acotada inferiormente o superiormente, o ambas a la vez.

En el capítulo II se estudia el significado de que las imágenes de una función se encuentren "cerca de un número *l*", cuando los puntos de donde provienen dichas imágenes estén "cercanos a un número *a*", definiéndose el concepto de límite; posteriormente, se establece una definición de límite de una función en términos de sucesiones, esto es, que el límite de una función es *l* cuando nos acercamos al punto *a*, lo cual equivale a decir que para cualquier sucesión que converja al punto *a*, siempre se genera una sucesión de imágenes que converge en *l*. En la tercera sección de dicho capítulo se demuestran las propiedades sobre límites para la suma, producto y cociente de funciones y algunos otros resultados. Finalmente, se estudia el concepto de límites laterales, por la izquierda y por la derecha, y se estable la relación entre este tipo de límites y la existencia del límite como tal.

En el tercer capítulo se desarrolla el concepto de continuidad en un punto apoyándonos en el concepto de límite, se establece que una función es continua en *a* si el límite de sus imágenes se acerca a la imagen de *a* cuando los puntos, de donde provienen las imágenes, se acercan al punto *a*; posteriormente, se desarrolla el concepto de continuidad utilizando sucesiones, se dirá que una función es continua en *a*, si para cualquier sucesión que converja al punto *a*, éste produce una sucesión de imágenes que convergen a la imagen de *a*; finalmente se analiza la continuidad en términos de los límites laterales y se establecen los conceptos de continuidad por la izquierda y continuidad por la derecha.

El capítulo IV presenta tres resultados sobre una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, estos son: 1) si las imágenes de los extremos del intervalo, una es positiva y la otra negativa, entonces siempre existirá un elemento dentro del intervalo el cual tenga imagen igual a 0; 2) la función siempre será acotada superiormente; 3) siempre existirá un elemento del intervalo que tenga imagen mayor o igual a cualquier imagen que provenga del intervalo.

Para concluir, quisiera citar a Jean Dieudonne (1906-1992), quien establece que para la enseñanza de las matemáticas se debe desarrollar y fortalecer el binomio *metodología y contenido*:

> […] enseñar a ordenar y a encadenar sus pensamientos (del alumno) con arreglo al método que emplean los matemáticos, y porqué se reconoce que este ejercicio desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio. El objeto de esta enseñanza debe ser por tanto el método matemático y las materias de enseñanza no serán más que ilustraciones bien elegidas del mismo.[1]

Sin más que agregar, dejo este libro a su consideración.

[1] J. Dieudonne y J. Piaget, *La enseñanza de las matemáticas*, Madrid, Aguilar, 1971.

I. Funciones

En este capítulo se aborda uno de los conceptos centrales de la matemática, el concepto de función, a partir de establecer una dependencia entre variables como la velocidad promedio y el tiempo para una distancia fija y, posteriormente, estableciendo una relación algebraica por medio de una fórmula, para terminar con una definición en términos de relaciones entre conjuntos de números; cada una de estas formas de abordar el concepto, pone de manifiesto algunas de las características que posee una función. De la mano de la definición de función se abordan los conceptos de dominio y gráfica.

Asimismo, se exponen los conceptos de igualdad entre funciones, y las formas en las que se pueden operar funciones, suma, producto y cociente; asimismo, se define lo que se entenderá como una función de función a través de la composición de funciones. Se definen también algunas propiedades importantes como el que una función sea: 1) inyectiva (uno a uno), esto es, que números diferentes posean imágenes diferentes; 2) suprayectiva (sobre), que dado un número real éste sea imagen de algún otro número real; 3) biyectiva, lo que equivale a decir, que una función es uno a uno y sobre.

Más adelante se estudian los comportamientos de monotonicidad que tienen algunas funciones, esto es, se establece cuando una función es creciente, decreciente, no creciente y no decreciente en ciertos intervalos. Finalmente, se exponen los conceptos de función acotada superior e inferiormente; en caso de que se cumplan las dos propiedades, se dirá, simplemente, que una función es acotada.

Sección 1.1. Funciones de una variable real

El concepto de función es una de las ideas centrales en la matemática, establece relaciones entre variables y desarrolla la idea de causalidad; esta sección inicia con la definición de función de una variable real y de su dominio.

Primero se verá el concepto de función ligado a las ideas de fórmulas o ecuaciones, y se finalizará con una definición en términos de relaciones.

La matemática ha pasado a ser un elemento importante para describir relaciones entre variables en otras ciencias, como en economía, geografía, administración, entre otras. Se recalca lo anterior, ya que posiblemente se tenga la idea de que la matemática y sus conceptos sólo explican fenómenos físicos.

(1) Para nosotros es conocido el concepto de velocidad promedio:

$$v = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}}$$

Supongamos que se recorren 100 m en línea recta; esta distancia se puede recorrer en 20, 40 o 100 segundos, etcétera. Obviamente, el tiempo nos dirá qué tan rápido (en promedio) se hizo el recorrido. Tabulemos los tiempos anteriores.

T	V
20 seg	5 m/s
40 seg	2.5 m/s
100 seg	1 m/s
110 seg	0.999 m/s
150 seg	0.666 m/s

$$v = \frac{100}{t}$$

Hagamos algunas observaciones:

a) A cada tiempo le corresponde una única velocidad.
b) El valor de la velocidad depende del tiempo.
c) Al asignar a cada tiempo una única velocidad, dicha asignación no es arbitraria, o sea, la asignación está sujeta a una regla bien determinada.

La asignación se hace por medio de la fórmula

$$v = \frac{100}{t}$$

(2) Sea la expresión $y = 2x + 1$; se observa que si tomamos un valor para $x = 3$, mediante nuestra expresión, y tendrá asociado el valor $y = 2(3) + 1$, o sea $y = 7$ cuando $x = 3$. Tabulemos algunos valores.

X	Y
0	1
1	3
1.5	4
2	5
2.5	6

$y = 2x + 1$

Veamos lo siguiente:

a) A cada valor de x le corresponde un único valor de y.
b) El valor de y, depende del valor x.
c) Se asigna a cada valor de x su único valor en y, esta asignación se realiza por medio de la fórmula $y = 2x + 1$.

De las dos situaciones anteriores, se han obtenido características comunes, las cuales se escribirán de manera fluida. Las relaciones anteriores asignan a un número real otro número real único, mediante una regla de asociación; en el caso (1) la relación está determinada por $v = \frac{100}{t}$, y en (2) la relación está dada por $y = 2x + 1$. A este tipo de relaciones, que a un número real le asocian otro número real único, les llamaremos funciones.

DEFINICIÓN 1.1.1

Una relación que a cada $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ le asigna un único número real, le llamaremos función o función de variable real. Al conjunto A se le llamará dominio de la función.

¿La relación que asigna a cada número real su doble es una función? Sí, puesto que un número sólo tiene un doble, por ejemplo:

5 tiene asociado al 10
-3.1 tiene asociado al -6.2
y en general a tiene asociado al $2a$

Esto último da pauta para escribir esta relación por medio de una expresión algebraica, $y = 2x$.

Importante

Las relaciones que se han visto hasta el momento son tales que a cada número real le asocian otro número real y la asignación es única, pero existen relaciones en las que a un número real le pueden asociar más de un número: por ejemplo, la relación que a cada entero le asocia sus divisores. Esta relación le asocia, por ejemplo al 20, los números ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10, ± 20. Lo que distingue a las funciones es que las asociaciones son únicas.

Una función es una relación, pero no siempre una relación es una función.

Ejemplo 1.1.1

Las siguientes relaciones son funciones reales:

a) A cada x se le asigna $x^2 + 1$
b) A cada x se le asigna $2x + 3$
c) A cada x se le asigna $\dfrac{x}{x+1}$

Ejemplo 1.1.2

¿La relación que asigna a un número real mayor o igual a cero su raíz cuadrada es una función?

Para contestar esto respondamos a la siguiente pregunta: ¿qué número tiene asignado el 9? Se debe saber la raíz cuadrada de 9.

La raíz cuadrada de 9 es 3 y -3, de esta manera el 9 tiene asignados dos números (3 y -3), notamos que la asignación no es única. Para que una relación sea función, las asignaciones deben ser únicas, así decimos que esta relación no es función.

Ejemplo 1.1.3

¿La relación que asigna un número real mayor o igual a cero su raíz cuadrada positiva es función?

Un número real mayor o igual a cero tiene asociadas dos raíces cuadradas, una positiva y la otra negativa, pero en esta relación se nos pide que sólo tomemos la positiva, es decir, realiza una asignación única, por tanto, esta relación sí es función.

Notación

Si a la relación que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna su triple menos 1 la llamamos *f*, la denotaremos como $f(x) = 3x - 1$.

Así también, si tenemos una función *f* con dominio *A*, la escribiremos como $f : A \to \mathbb{R}$ Si $x_0 \in A$. El elemento que se le asigna a x_0, se le escribirá como $f(x_0)$, y le llamaremos la imagen x_0 bajo *f*. Nos referiremos a la función *f*, o bien $f(x)$.

DEFINICIÓN 1.1.2

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Definimos a la gráfica de la función *f* como $\{(x, f(x)) | x \in A\}$.

Los elementos de la gráfica de *f*, los dibujamos sobre el plano cartesiano $X - Y$.

Ejemplo 1.1.4

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = 2x$. En la figura 1 se muestra una parte de la gráfica de la función *f*.

Ejemplo 1.1.5

Sea $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = \frac{x}{2}$. La gráfica de *g* se muestra en la figura 2.

Figura 1

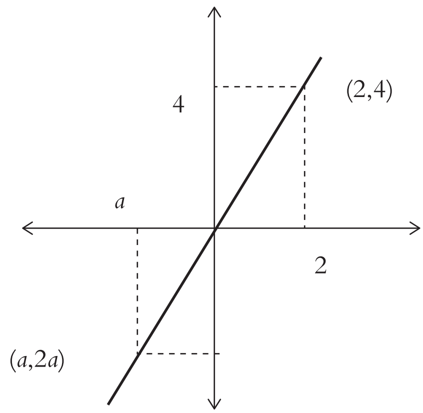
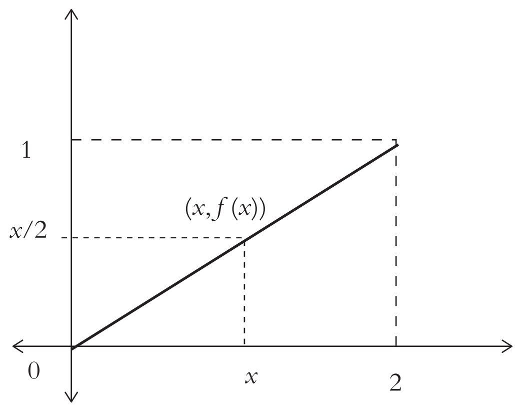


Figura 2



Ejemplo 1.1.6

Sea $f(x)=2^x$, a esta función la llamaremos la función exponencial de base 2. Evaluemos algunos valores:

Si $x=1 \to f(1)=2^1=2$

Si $x=2 \to f(2)=2^2=4$

Si $x=3 \to f(3)=2^3=8$

$$\text{Si } x = 8 \rightarrow f(8) = 2^8 = 256$$

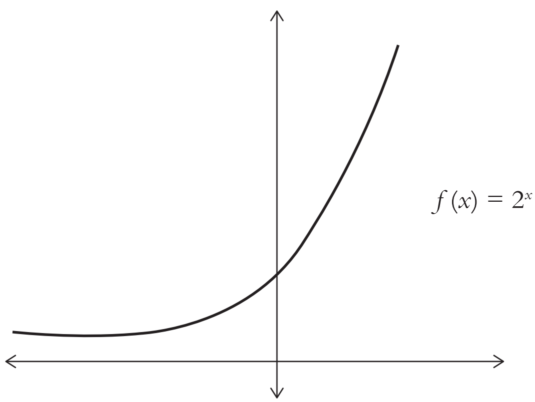
$$\text{Si } x = -1 \rightarrow f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\text{Si } x = -8 \rightarrow f(-8) = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = 0.00391$$

$$\text{Si } x = -100 \rightarrow f(-100) = 2^{-100} = \frac{1}{2^{100}} = 7.88x10^{-31}$$

No es difícil intuir que si x se hace grande y positiva, entonces $f(x)$ se hace grande, y si x toma valores grandes y negativos, entonces los $f(x)$ serán pequeños. A continuación se muestra un bosquejo de la gráfica de f (figura 3).

Figura 3

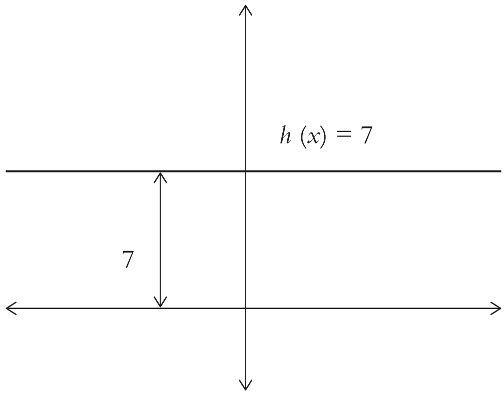


Ejemplo 1.1.7

¿La relación que a cada real asigna el número 7 es función?

Esta relación asigna a 8 el número 7, a 4 le asigna el número 7, a –5 le asigna el número 7, por citar algunos ejemplos. Se nota que si x es un número real, a éste le asignamos el número 7 y esta asignación es única, por lo tanto, la relación sí es función. ¿Cómo la denotamos? Como $h(x) = 7$ y la llamaremos la función constante 7. Gráficamente la función h se puede ilustrar en la figura 4.

Figura 4



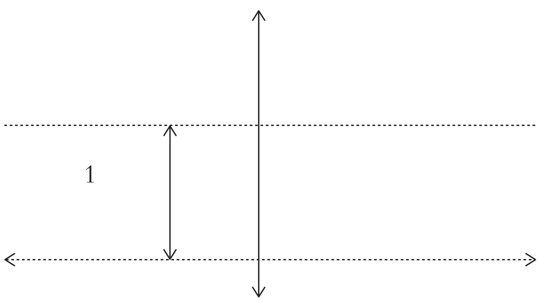
Ejemplo 1.1.8

La relación que a un racional le asigna el 1 y a un irracional le asigna el 0 es una función, la cual la se puede escribir como:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in I \end{cases}$$

A continuación, aparecen dibujados algunos puntos de la gráfica de g (se denota con $\mathbb{Q}$ a los racionales y con I a los irracionales).

Figura 5



A continuación, se describirá, de una forma más precisa, al conjunto A de la definición de función al que se ha llamado dominio.

(3) Sea la función $f(x)=\sqrt{x}$ (raíz cuadrada positiva); esta función le asigna al número 9 el número 3, a 81 le asocia el 9, a 25 le asocia el 5, y en general, a x le asocia $\sqrt{x}$ siempre que x sea mayor o igual a cero. Ahora nos preguntamos ¿por qué x tiene que ser mayor o igual a cero? ¿-9 tiene algún real asociado? No, puesto que ningún número real elevado al cuadrado nos da -9, o sea, $\sqrt{-9}$ no es un número real (es complejo). En general, si a es un número negativo se tiene que $\sqrt{a}$ no es un número real, de esta manera la función f no asocia ningún real a un número negativo. Se dice que la expresión $f(a)=\sqrt{a}$ es un número real, sólo cuando a es un número real positivo o cero.

(4) Sea la función $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ citemos algunas asignaciones:

Al 2 se le asigna $\dfrac{1}{2-1}=1$

Al 8 se le asigna $\dfrac{1}{8-1}=\dfrac{1}{7}$

Al $\dfrac{1}{2}$ se le asigna $\dfrac{1}{\frac{1}{2}-1}=-2$

¿Qué número tiene asignado 1? O bien, ¿cuánto vale $g(x)$ si $x = 1$? Observe que $g(1)=\dfrac{1}{1-1}=\dfrac{1}{0}$.

Ahora nos preguntamos ¿$g(1)$ es un número real? No, recordamos que la división por cero no es permitida, decimos que $g(1)$ está indeterminado, también aquí diremos que g no tiene sentido para $x = 1$.

Estos dos ejemplos nos dicen que una función no siempre puede asociar a un número real otro número real, por lo tanto, el conjunto de números para los cuales una función puede asociar a cada elemento de dicho conjunto un número real es un conjunto distinguido.

En el caso (3), el conjunto $A=\{x \mid x\geq 0\}$; si $x_o \in A$ la función f le asocia $\sqrt{x_o}$ y este es un número real, luego si $x_1 \notin A$ entonces f no le asigna un número real a x_1, o sea, $f(x_1)=\sqrt{x_1}$ no es un número real.

En el caso (4), todos los números reales en el conjunto $B=\{x \mid x\neq 1\}$ son susceptibles de asignárseles una imagen $\dfrac{1}{x_0-1}$ que es un número real, ya que como $x_0\neq 1$, se tiene que $x_0-1\neq 0$, por lo tanto se puede hacer la división de 1 entre x_0-1.

DEFINICIÓN 1.1.3

Si f es una función, al conjunto de números x para los cuales $f(x)$ es un número real, se le llamará dominio o dominio natural de f; para este conjunto diremos que la función f tiene sentido, está definida o está bien definida.

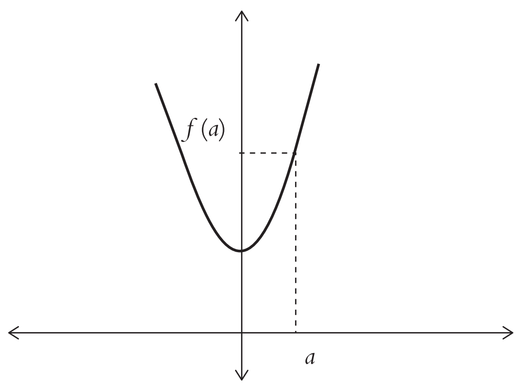
Ejemplo 1.1.9

El dominio de la función $f(x) = x^2 + 1$ es todo $\mathbb{R}$, ya que si tomamos un elemento $a \in \mathbb{R}$, mediante la función f se le puede asignar el número $a^2 + 1$ el cual es un real, o sea, $f(a)$ es un número real (figura 6).

Nota

Al dominio natural de la función f lo detonaremos Df.

Figura 6



Problema 1.1.1

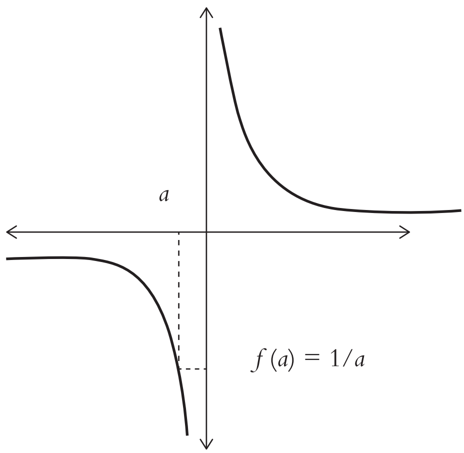
¿Quién es el dominio natural de $g(x) = \frac{1}{x}$? (figura 7).

Para contestar esto, recurrimos a la definición de dominio natural que, en este caso, es el conjunto de números x para los cuales $g(x)$ es un número real.

Observe que, si $x = 5$ tendremos que $g(5) = \frac{1}{5}$ el cual es un número real; si tomamos a 1.3, –450 o 7.4, se tendrá que $g(1.3)$, $g(-450)$, $g(7.4)$, son los tres números reales. Preguntamos ¿para qué valores de x, $g(x)$ no es un número real?

Para $x = 0$, ya que $g(0) = \dfrac{1}{0}$ no es un real ($\dfrac{1}{0}$ está indeterminado), aún más, $x = 0$ es el único real para el cual $g(x) \notin \mathbb{R}$; así $Dg = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq 0\right\}$.

Figura 7



Problema 1.1.2

Encontrar el dominio natural de la función $h(x) = \sqrt{x-2}$

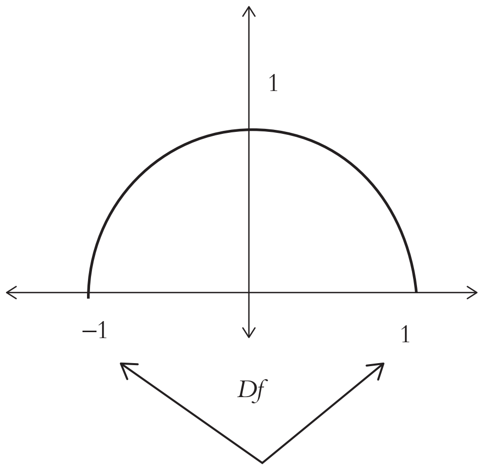
Solución

La definición de dominio natural nos dice que el dominio de h será el conjunto de números x tales que $h(x)$ es un número real. ¿Cómo debe de ser x para que $\sqrt{x-2}$ sea un número real?

Aquí se nota que para que un radical cuadrático sea un número real, debe contener, dentro del radical, un número positivo o cero, es decir, para que $\sqrt{x-2}$ sea un número real, $x - 2$ debe ser un número positivo o cero.

De esta manera, se debe tener que $x - 2 \geq 0$ y con esto tendremos que $x \geq 2$, esto nos dice que para que $\sqrt{x-2}$ sea un número real, x deber ser mayor o igual a 2, por lo tanto $Dh = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq 2\right\}$.

Figura 8



Problema 1.1.3

Encontrar el dominio natural de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Solución

La gráfica de esta función nos describe la parte superior de una circunferencia centrada en (0, 0) de radio 1 (figura 8). Para que $\sqrt{1 - x^2} \in \mathbb{R}$, debemos tener que $1 - x^2 \geq 0$ lo cual nos dice que $1 \geq x^2$. Luego, los valores x que cumplen con $1 \geq x^2$ son los $x \in [-1,1]$, por lo tanto $Df = [-1, 1]$.

Problema 1.1.4

Encontrar el dominio natural de $g(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}$

Solución

En la expresión de esta función aparecen raíces y denominadores, recuerde que para construir el dominio natural debemos erradicar números que no involucren raíces de números negativos y/o ceros en los denominadores.

Primero, los números que no están en el dominio natural de h son los números negativos; ahora, ¿esto quiere decir que el dominio de h son todos los números mayores o iguales a cero? No, puesto que si tomamos a $x=\pi^2$ tendremos $f(\pi^2)=\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}\sqrt{\pi^2}}=\dfrac{\pi^2}{\operatorname{sen}\pi}=\dfrac{\pi^2}{0}$ o sea, debemos eliminar los números mayores o iguales a cero, para los cuales $\operatorname{sen}\sqrt{x}=0$ ¿Qué números son estos? Son los números $x=0, \pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \ldots\ n^2\pi^2$ donde n debe ser entero positivo, ya que

$$0=\operatorname{sen}\sqrt{0}=\operatorname{sen}\sqrt{\pi^2}=\operatorname{sen}\sqrt{4\pi^2}=\operatorname{sen}\sqrt{9\pi^2}=\ldots\ \operatorname{sen}\sqrt{n^2\pi^2}\ldots$$

de esta manera el dominio natural de h será:

$$Dh=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>0,\ x\neq n^2\pi^2\ \text{ con }\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Problema 1.1.5

Encontrar el dominio de $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

Solución

Para construir el dominio natural de g debemos seleccionar a los números reales tales que la expresión dentro del radical sea mayor que cero.

Los números reales x, donde la función $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ tiene sentido, deben cumplir $x-1>0$, por tanto $Dg=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x>1\right\}$.

Aclaración

Por ejemplo, si tenemos a $f:[2,8]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=5x^2+x+1$, se entiende que [2, 8] es el dominio de f, pero si aparece solamente la función $f(x)=5x^2+x+1$, se entenderá que su dominio es el dominio natural.

EJERCICIOS

1.1.1. Encuentre el dominio para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

b) $g(x) = \sqrt{\ln x}$

c) $h(x) = \dfrac{3}{1-\tan x}$

Sección 1.2. Igualdad entre funciones

Esta pequeña sección tiene como objeto que el lector aprecie el concepto de la igualdad entre funciones; el juicio que emitiremos sobre la igualdad, o no, para una pareja de funciones, dependerá de la forma de éstas, así como de sus dominios.

Sea $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x\in[-1,1]\\ 1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ y $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, hacemos notar que la función *f* está constituida por dos funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ siempre que $x\in\left[-1,1\right]$, y $f(x)=1$ cuando $x>1$.

En las figuras 1 y 2 se muestran las gráficas de las funciones *f* y *g*, respectivamente.

Preguntamos: ¿quién es el dominio de *g*? El dominio de la función *g* es $Dg=[-1,1]$ (ver problema 1.1.3).

Figura 1

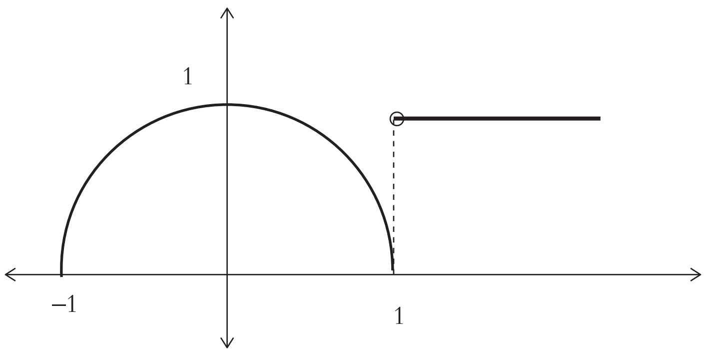
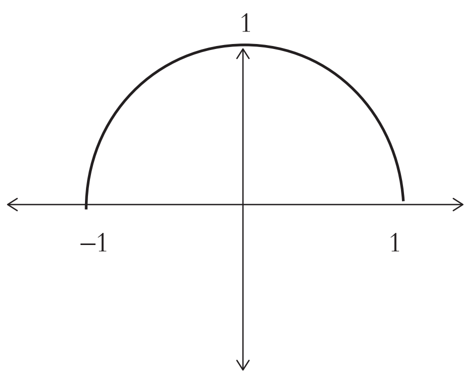


Figura 2



Ahora, ¿quién es el dominio de *f*? Notamos que si $x \in [-1,1]$ se tendrá que $f(x)$ es un número real, por ejemplo si $x_1 = 0.5$ obtendremos $x_1 = \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-0.5^2} = 0.866$ y si tomamos un $x_2 = 8$ obtendremos $f(x_2) = 1$ por ser $x_2 > 1$.

El dominio de la función *f* es $Df = [-1,1] \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

Nos percatamos de que las funciones *f* y *g* tienen comportamientos idénticos cuando toman valores en el intervalo [-1, 1], así también notamos que la función *f* sigue tomando valores para $x > 1$, mientras que la función *g* no está definida para estos; las gráficas de *f* y *g* (ver figuras 1 y 2) refuerzan lo anterior.

Podríamos decir, que las funciones *f* y *g* son diferentes.

DEFINICIÓN 1.2.1

Sean *f* y *g* funciones, diremos que $f = g$ si

(i) $Df = Dg$

(ii) $f(x) = g(x) \quad \forall x \in Df = Dg$

Problema 1.2.1

Sean $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ y la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$

¿Son iguales las funciones *h* y *g*?

Solución

El dominio de la función *g* es conocido, $Dg = \mathbb{R} - \{0\}$. Notamos que el dominio de la función *h* es muy parecido al dominio de la *g*, pero existe una pequeña diferencia entre ambos. ¿Cuál?, que *h* sí está definida en 0 y la *g* no. ¿Cuánto vale *h*(0)? *h*(0) = 0.

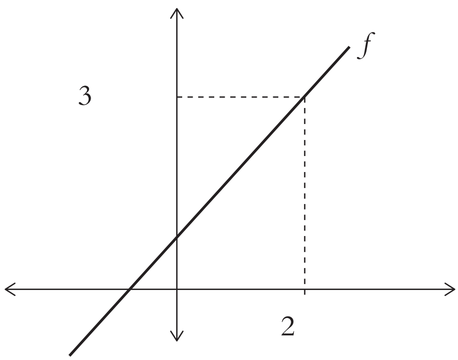
Con lo anterior se tiene $Dh = \mathbb{R}$ y $Dg = \mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto no se cumple (i) de la definición de igualdad entre funciones, de esta manera concluimos que $f \neq g$.

Problema 1.2.2

Sean $f(x) = x + 1$ (figura 3) y $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

¿Son iguales las funciones f y g?

Figura 3



Solución

Notamos que $Df = Dg = \mathbb{R}$, con esto se cumple (i) de la definición de igualdad entre funciones. Ahora, ¿se cumplirá que $\forall x \in Dg = Df \;\; f(x) = g(x)$? No, puesto que existe $x = 2$ tal que $f(2) = 3$ y $g(2) = 1$, es decir $f(2) \neq g(2)$.

Finalmente, se cumple (i) pero no se cumple (ii), por lo tanto, concluimos que $f \neq g$.

EJERCICIOS

1.2.1. Encuentre el dominio natural de

a) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$

c) $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si} \quad x \neq 2, -2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

1.2.2. Diga si son iguales o no las siguientes parejas de funciones:

(a) $f(x) = -x+1$ y $g(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \neq -2, 2 \\ -1 & \text{si} \quad x = 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

c) $h(x) = 2x-3$ y $l(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

Sección 1.3. Operaciones con funciones

Las operaciones entre funciones, como veremos, son una manera de producir nuevas funciones a partir de dos dadas.

Para dos funciones, definiremos las operaciones de suma, producto y cociente, siendo estas operaciones cerradas en el sentido de que, al operar dos funciones, el resultado es una función.

Si tenemos a $f(x) = 2x$ y $g(x) = 3$ (funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$) y tomamos un $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario, sabemos que $f(x_0) = 2x_0$ y $g(x_0) = 3$ ¿Podemos sumar $f(x_0)$ con $g(x_0)$? Sí, puesto que $f(x_0)$ y $g(x_0)$ son números reales, de esta manera $f(x_0) + g(x_0) = 2x_0 + 3$.

La función f asigna a x_0 el número $2x_0$, la función g asigna a x_0 el número 3 y notamos que hay una regla que asigna a x_0 el número $2x_0 + 3$ ¿Mediante qué función se hace la última asignación? Mediante una función la cual denotaremos como $f + g$.

Ejemplo 1.3.1

Sean $h(x) = 5x - 3$ y $p(x) = x^2 + 3$ encontremos la función $h + p$:

Sean $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, $(h + p)(x) = h(x) + p(x) = (5x - 3) + (x^2 + 3)$

$(h + p)(x) = x^2 + 5x$.

Definamos ahora la función suma.

DEFINICIÓN 1.3.1

Sean f y g dos funciones, definimos a la función $f + g$ como $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x$.

Problema 1.3.1

Construir la función $h + l$ donde $h(x) = 3x^2 + x$ y $l(x) = 2x^2 - 4$

Por la definición 1.3.1 tenemos

$(h + l)(x) = h(x) + l(x) = (3x^2 + x) + (2x^2 - 4) = 5x^2 + x - 4$.

¿De la misma manera en que se definió la función suma, se podrá definir el producto y cociente entre funciones? Sí, tomemos las funciones con las que iniciamos la sección, $f(x)=2x$ y $g(x)=3$, si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un número arbitrario, podemos realizar el cociente

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{2x_0}{3}$$

O sea, la función $\frac{f}{g}$ puede estar dada como $\left[\frac{f}{g}\right](x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\forall x$ con $x \neq 0$, es decir, $\left[\frac{g}{f}\right](x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{2x}$ siempre y cuando $x \neq 0$, con esto podemos ya definir el cociente entre funciones.

DEFINICIÓN 1.3.2

Sean f y g funciones reales, definimos a la función $\frac{f}{g}$ como $\left[\frac{f}{g}\right](x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ $\forall x$ siempre y cuando $g(x) \neq 0$.

Definamos también el producto entre funciones.

DEFINICIÓN 1.3.3

Sean f y g funciones, definimos a fg como $(fg)(x)=f(x)g(x)$ $\forall x$

Ahora, si tenemos dos funciones f y g, éstas poseen dominios propios Df y Dg. Una pregunta que surge es ¿cómo es el dominio de $f+g$, fg y $\frac{f}{g}$? Veamos la siguiente situación:

$f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y $g(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$. Sus dominios son, respectivamente, $Df=[-1,1]$ y $Dg=[0,2]$ (ver figuras 1 y 2) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(x-1)^2}$. Nótese que si tomamos un $x_0 \in [-1,0]$, $f(x_0)$ será un número real, pero $x_0 \notin Dg$. De la misma manera, si tomamos un $x_1 \in [1,2]$, tendremos $g(x_1)$ real, pues $x_1 \in Dg$, pero $f(x_1)$ no es un número real, ya que $x_1 \notin Df$.

¿Quién es $D(f+g)$? El dominio de $f+g$ será el conjunto de números para los cuales se pueda sumar $f(x)$ con $g(x)$, o sea $f(x)$ y $g(x)$ deben ser números reales.

Figura 1

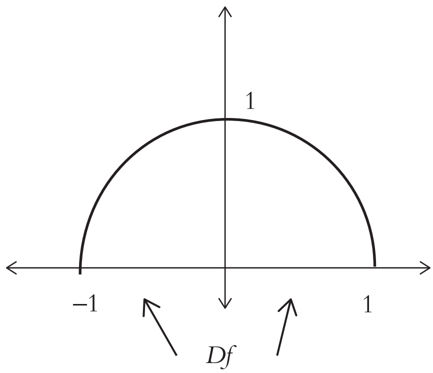
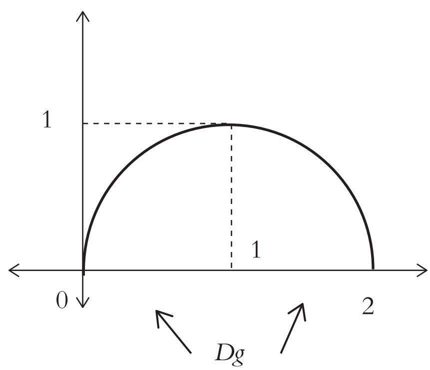


Figura 2



¿Cuáles son esos números? El conjunto de valores tales que f y g estén bien definidas al mismo tiempo, es decir

$D(f+g) = Df \cap Dg$, en este caso

$D(f+g) = [-1,1] \cap [0,2] = [0,1]$

Se hace notar que para la función

$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(x-1)^2}$ los números x para los cuales la función fg tiene sentido, deben ser tales que f y g estén bien definidas en esos valores x a la vez, o sea, el conjunto de números x, tales que $x \in Df$ y $x \in Dg$.
$D(fg) = Df \cap Dg = [-1,1] \cap [0,2]$, para nuestro caso concreto,
$D(fg) = [-1,1] \cap [0,2] = [0,1]$.

El dominio $\dfrac{f}{g}$ será casi igual que en los casos anteriores, es decir, el conjunto de números x para los cuales $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ estén bien definidas a la vez, pero además debemos excluir a los x, tales que $\sqrt{1-(x-1)^2} = 0$ ¿Qué números son estos?: $x = 0$ y $x = 2$.

De esta manera $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = (Df \cap Dg) - \{x \mid g(x) \neq 0\} = (0,1]$.

Importante

En las tres definiciones de esta sección se ha dicho que, por ejemplo $(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x$, cuando decimos $\forall x$, es para toda $x \in D(f+g)$.

De la misma manera, cuando se trata de producto y cociente, de esta manera tendremos

$$D(f+g) = D(fg) = Df \cap Dg \text{ y } D\left(\frac{f}{g}\right) = (Df \cap Dg) - \{x \mid g(x) \neq 0\}.$$

Problema 1.3.2

Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, obtener $f + g, fg, \dfrac{f}{g}$, y sus respectivos dominios.

Solución

(i) Para obtener $f + g$, tenemos por la definición 1.3.1 que $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + x^2$; ahora, ¿quién es $D(f+g)$?
$D(f+g) = Df \cap Dg$ pero $Df = Dg = \mathbb{R}$ por lo tanto
$D(f+g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

(ii) Para obtener fg, tenemos por la definición 1.3.3 que $(fg)(x) = f(x)g(x) = (x)(x^2) = x^3$; ahora, ¿quién es $D(fg)$? $D(fg) = Df \cap Dg = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

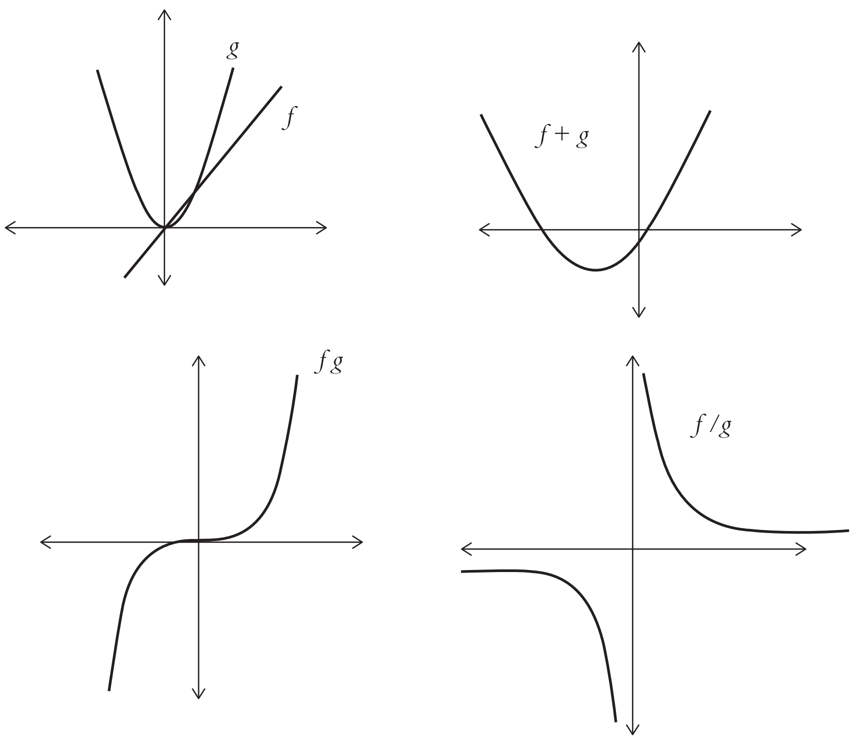
(iii) Para obtener $\dfrac{f}{g}$ tenemos por la definición 1.3.2 que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}; \text{ ahora ¿quién es } D\left(\frac{f}{g}\right)?$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (Df \cap Dg) - \{x \mid g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

A continuación se muestran las gráficas de $f, g, f + g, fg, \dfrac{f}{g}$.

Figura 3



EJERCICIOS

1.3.1 Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, encontrar $f + g, fg, \dfrac{f}{g}$ y sus respectivos dominios.

1.3.2 Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios de grados n y m respectivamente, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, son soluciones de $p(x)$ y $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ son soluciones de $q(x)$, encontrar $D\left(\dfrac{p}{q}\right)$ y $D\left(\dfrac{q}{p}\right)$, ¿Qué puede decir si ocurre $D\left(\dfrac{p}{q}\right) = D\left(\dfrac{q}{p}\right)$?

Sección 1.4. Composición de funciones

Otra manera para encontrar una función, dadas dos iniciales, es obtener una función de función, es decir, obtener una función en la cual una función tome valores que provengan de otra función.

La composición nos da también una manera elegante de escribir funciones.

(1) Sean $f(y) = \operatorname{sen}(y)$ y $g(x) = x^2$, si tomamos a $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \in \mathbb{R}$ preguntamos, ¿podemos evaluar $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en g? Sí, esto es $g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Ahora, ¿podemos evaluar $g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ en f? Sí, puesto que $g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ es un número real elemento del dominio de f, de esta forma

$$f\left(g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) Ahora, si tomamos $x_0 \in \mathbb{R}$ se observa que $g(x_0) = x_0^2 \in \mathbb{R}$; preguntamos, ¿podemos evaluar $g(x_0)$ en f? Sí, puesto que $g(x_0) \in \mathbb{R} = Df$, de esta manera tendremos $f(g(x_0)) = f(x_0^2) = \operatorname{sen} x_0^2$

Si llamamos a $h(x) = \operatorname{sen} x^2$, notamos que h es una nueva función, combinación de las funciones f y g. Esta función h se estructura de la siguiente manera:

A x se le asigna x^2 mediante g, luego a x^2 se le asigna sen x^2 mediante f.

$$\underset{\text{mediante } g}{x \rightarrow x^2} \underset{\text{mediante } f}{\rightarrow \operatorname{sen} x^2}$$

$$\underset{\text{mediante } h}{x \rightarrow \operatorname{sen} x^2}$$

(3) Ahora sean $h(x) = 2x + 1$ y $k(y) = 2y^2 + y + 1$; se sabe que $Dh = Dk = \mathbb{R}$. Si $y_0 \in \mathbb{R}$ se tiene $k(y_0) = 2y_0^2 + y_0 + 1 \in \mathbb{R}$ y preguntamos, ¿quién es $h(k(y_0))$?

$$h(k(y_0)) = 2(k(y_0)) + 1 = 2(2y_0^2 + y_0 + 1) + 1 =$$
$$4y_0^2 + 2y_0 + 2 + 1 = 4y_0^2 + 2y_0 + 3$$

De aquí se tiene una nueva función: $l(y) = 4y_0^2 + 2y_0 + 3$

¿De la misma manera se puede pensar una nueva función $k(h(x))$? Si

$$k(h(x)) = 2(h(x))^2 + (h(x)) + 1$$
$$k(h(x)) = 2(2x+1)^2 + (2x+1) + 1$$
$$k(h(x)) = 2(4x^2 + 4x + 1) + (2x+1) + 1$$
$$k(h(x)) = 8x^2 + 8x + 2 + 2x + 2$$
$$k(h(x)) = 8x^2 + 10x + 4$$

(4) Ahora sean $l(x) = x^2$ y $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ construyamos las funciones $l(h(x))$ y $h(l(x))$:

$$l(h(x)) = l\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$h(l(x)) = h(x^2) = \sqrt{1-(x^2)^2}$$

Una pregunta que surge es ¿quién es el dominio de estas nuevas funciones?

Veamos primero, ¿quién es dominio de $l(h(x))$?

Notamos que un x en el dominio de $l(h(x))$ debe estar, primero, en Dh y como segundo requisito, $h(x)$ debe estar en Dl.

$x \in Dh$ y $h(x) \in Dl$, o sea, $x \in [-1,1]$ y $h(x) \in \mathbb{R}$ con esto, el dominio es $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1,1] \text{ con } h(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1,1] \text{ y } \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R},$ para que $\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}$, $1-x^2$ debe ser mayor o igual a cero, o sea $1-x^2 \geq 0$, de esta forma:

$A = \{x | x \in [-1,1] \text{ con } 1 - x^2 \geq 0\} = \{x | x \in [-1,1] \text{ con } 1 \geq x^2\}$

Pero precisamente, si $x \in [-1,1]$ se tiene $1 \geq x^2$ con esto $A = \{x | x \in [-1,1]\} = [-1,1]$.

Se le deja al lector construir el dominio de la función $h(l(x))$.

(5) En general, el dominio de la función $f(g(x))$ será $A = \{x \mid x \in Dg \text{ y } g(x) \in Df\}$ Definamos esta nueva manera de obtener funciones.

DEFINICIÓN 1.4.1

Sean f y g funciones, definimos a $f \circ g$ como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ con $D(f \circ g) = \{x \mid x \in Dg \text{ y } g(x) \in Df\}$. A la función $f \circ g$ la llamaremos f compuesta con g, o bien, g seguida de f.

Problema 1.4.1

Sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x$, encontrar las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, y sus respectivos dominios.

Solución

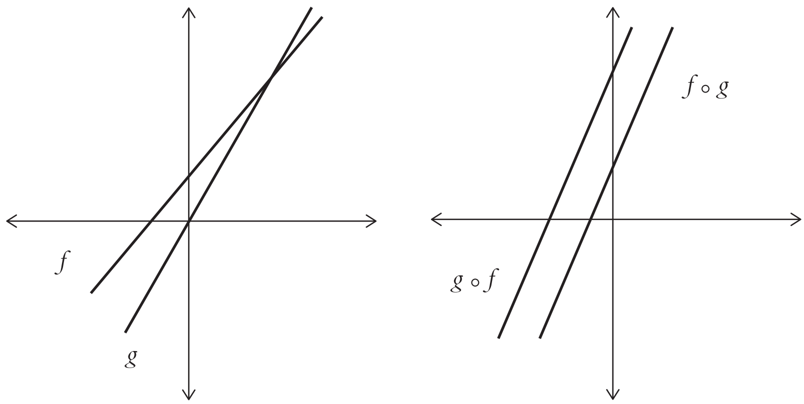
Primero encontramos $f \circ g$; para esto, la definición 1.4.1 nos dice $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, traduciendo esto a nuestras funciones tendremos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$.

Ahora, ¿quién es el dominio de $f \circ g$? Por la definición anterior se tiene $D(f \circ g) = \{x \mid x \in Dg \text{ y } g(x) \in Df\}$; para nuestra situación tenemos $Df = Dg = \mathbb{R}$, con esto $D(f \circ g) = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ y } g(x) \in \mathbb{R}\}$ ¿qué conjunto es este? $D(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Procedamos de la misma manera para encontrar $g \circ f$ y su dominio, utilizando la definición 1.4.1 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) = 2x + 2$.

Ahora $D(g \circ f) = \{x | x \in Df \quad f(x) \in Dg\} = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ y } x + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ (ver figura 1).

Figura 1



Problema 1.4.2

Sea $h(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, escribir a la función h como la composición de dos funciones f, g y encontrar el dominio de esta composición.

Solución

Esta función h puede verse como la composición de dos funciones $g(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $f(x)=\dfrac{1}{x}$, observe que $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}=h(x)$, de esta manera $h(x)=(f\circ g)(x)$ con $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$.

Ahora para construir a $D(f\circ g)$, la definición 1.4.1 nos dice $D(f\circ g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in Dg \text{ y } g(x)\in Df\}$; ahora preguntamos, ¿quién es Df y Dg? $Df=\mathbb{R}-\{0\}$ y $Dg=\mathbb{R}$, de aquí tenemos:

$$D(f\circ g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\mathbb{R} \text{ y } g(x)\in\mathbb{R}-\{0\}\}$$

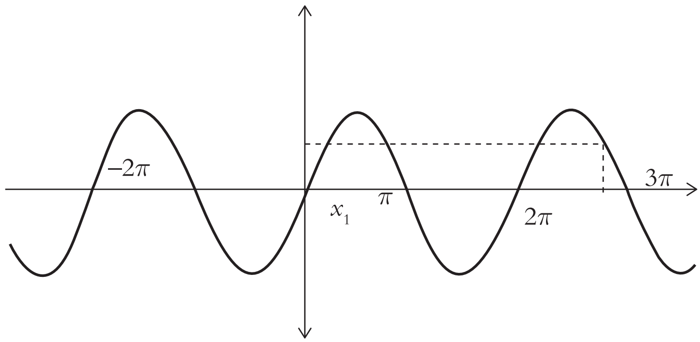
$$D(f\circ g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\mathbb{R} \text{ y } g(x)\neq 0\}$$

$$D(f\circ g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in\mathbb{R} \quad \operatorname{sen}x\neq 0\}$$

Preguntamos, ¿quiénes son los números x para los cuáles $\operatorname{sen}x\neq 0$?

Todos los números reales, excepto los múltiplos (positivos y negativos) de π (ver figura 2).

Figura 2



Estos números son $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \pm n\pi, \ldots$, o sea, si x es distinto de los números anteriormente mencionados, tendremos que $\operatorname{sen}(x) \neq 0$ por lo tanto

$$D(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \pm n\pi, \ldots \right\}$$

escribiendo de manera más compacta, tendremos

$$D(f \circ g) = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x \neq n\pi \ \text{ con } \ n \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ n\pi \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Problema 1.4.3

Escribir a $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ como la composición de dos funciones f y g, y encontrar el dominio de $f \circ g$.

Solución

Como en el problema anterior, la función h puede ser vista como $h(x) = (f \circ g)(x)$ con $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ y con $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Verifiquemos que, efectivamente $h(x) = (f \circ g)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = h(x)$$

Procedamos a construir $D(f \circ g)$; por la definición 1.4.1

$$D(f \circ g) = \left\{x \mid x \in Dg \ \text{ y } \ g(x) \in Df\right\}.$$

Sabemos que $Dg = \left[-1,1\right]$ (ver problema 1.1.3) y $Df = \mathbb{R} - \{0\}$ esta manera $D(f \circ g) = \left\{x \middle| x \in [-1,1] \ \text{ y } \ \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} = \left\{x \middle| x \in [-1,1] \ \text{ y } \ \sqrt{1-x^2} \neq 0\right\}$

Se debe tener a $\sqrt{1-x^2} \neq 0$, o sea $x \neq -1,1$, de aquí

$$D(f \circ g) = \left\{x \mid x \in [-1,1] \ \text{ con } \ x \neq -1,1\right\} = \left(-1,1\right)$$

Problema 1.4.4

Sean $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, construir $D(f \circ g)$.

Solución

Por la definición 1.4.1 tenemos $D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in Dg \ \text{ y } \ g\left(x\right) \in Df\right\}\ldots$ (I)

Para construir $D(f \circ g)$ necesitamos tener Dg y Df; el dominio de f es ya conocido, éste es $Df = [-1,1]$, sólo falta el dominio de g, el cual debe constar de los valores x para los cuales $x - 2$ sea mayor o igual a cero, estos valores son los $x \geq 2$, con esto $Dg = \{x \in \mathbb{R} \middle| x \geq 2\} = \left[2,+\infty\right)$ sustituyendo Df y Dg en (I) tendremos $D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in [2,\infty) \ \text{ con } \ \sqrt{x-2} \in [-1,1]\right\}$.

Observe que $\sqrt{x-2} \in \left[-1,1\right]$ significa que $-1 \leq \sqrt{x-2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x-2} \leq 1 \Rightarrow$ $0 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 3$, de esta forma

$$D(f \circ g) = \left\{x \mid x \in \left[2,+\infty\right) \ \text{ con } \ 0 \leq x \leq 3\right\} = \left[2,3\right].$$

Problema 1.4.5

Sean $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si} \quad x\in I\end{cases}$ $\quad g(y)=2y+1, \quad h(z)=z^2$

¿Qué valor numérico tiene $\left(f\circ\left(g\circ h\right)\right)(2)$?

Solución

¿Qué es $(f\circ(g\circ h))(2)$? Primero llamemos $g\circ h=l$, de esta manera, se rehace la pregunta, ¿qué valor tiene $(f\circ l)(2)$?

Por definición $(f\circ l)(2)=f(l(2))$, ahora; ¿cuánto vale $l(2)$?

$l(2)=(g\circ h)=g(h(2))=g(4)=2(4)+1=9$

$l(2)=9$ que es un número racional, de esta manera $f(l(2))=f(9)=1$, por lo tanto $(f(g\circ h))(2)=1$.

Problema 1.4.6

¿Qué funciones intervienen posiblemente en la siguiente expresión, para escribirla como una composición de funciones?

La expresión es $h(x)=\text{sen}\left(e^{x^2}\right)$

Solución

Esta h se puede ver como integrada por $f(x)=x^2$ $g(y)=e^y$ $h(z)=\text{sen}(z)$, veamos:

$(h\circ g\circ f)=h(g(f(x)))=h(g(x^2))=h(e^{x^2})=\text{sen }(e^{x^2})=h(x)$.

EJERCICIOS

1.4.1 Sean $f(x)=2x$ y $g(y)=y^2+1$, encontrar el dominio $(f\circ g)(y)$ y $(g\circ f)(x)$

1.4.2. Sean $h(x)=\text{sen}\,x$ y $g(y)=\sqrt{y-1}$, encontrar el dominio de $h\circ g$

1.4.3. Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=|x|$

(i) Construir $f \circ g$ y $g \circ f$

(ii) Construir las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$

(iii) Encontrar $D(f \circ g)$ y $D(g \circ f)$

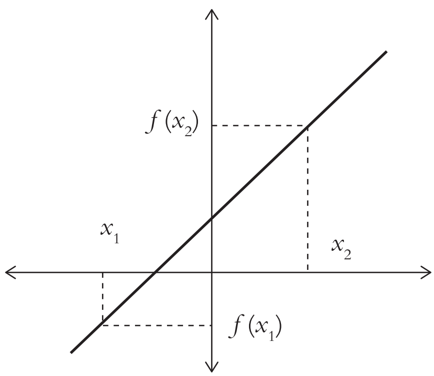
1.4.4 Escribir como una composición, de por lo menos tres funciones, a la función $h(x) = \dfrac{1}{\cos\left(e^{x^2+9}\right)}$

Sección 1.5. Funciones inyectivas y supreyectivas

En esta sección se estudiarán dos propiedades que poseen algunas funciones reales, la inyectividad y la suprayectiva.

(1) Sea $f(x) = x + 1$, con $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$; y calculamos $f(x_1) = f(-2) = -1$ y $f(x_2) = f(1) = 2$, con esto se puede ver que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) \neq f(x_2)$, es decir, dos números diferentes tienen imágenes diferentes.
Observe la gráfica de f (figura 1), en ella aparecen dos valores x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$

Figura 1



¿$f(x_1)$ y $f(x_2)$ son iguales o diferentes? Ocurre $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Se puede concluir que, si tenemos dos números diferentes ¿las imágenes de estos números serán diferentes?

(2) Sea $g:[0,2] \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2$, cuya gráfica aparece en la figura 2. Si tomamos dos números $x_1, x_2 \in [0,2]$ con $x_1 \neq x_2$ se observa, como en (1), que $g(x_1) \neq g(x_2)$. De la gráfica notamos también que esto ocurre para cualquier pareja de números en el intervalo $[0,2]$.

(3) Sea $g:[-2,2] \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2$ (figura 3). Preguntamos: ¿se sigue teniendo el comportamiento observado en (1) y en (2)? Es decir, ¿cualquier pareja $x_1, x_2 \in [-2,2]$ con $x_1 \neq x_2$ cumplirá $g(x_1) \neq g(x_2)$? No, pues existen $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ los cuales cumplen $x_1 \neq x_2$ y sin embargo $g(x_1) = g(x_2)$.

Figura 2

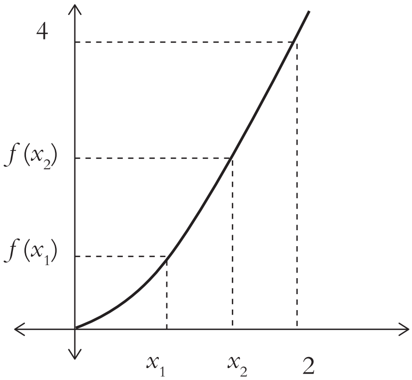
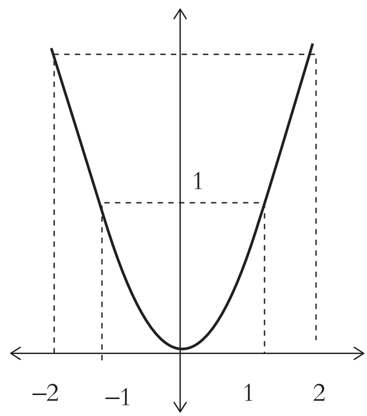


Figura 3



En (2) se observa que para cualquier pareja x_1, $x_2 \in [0,2]$ con $x_1 \neq x_2$ tendremos $g(x_1) \neq g(x_2)$, mientras que en (3) se tiene que, si $x_1, x_2 \in [-2,2]$ con $x_1 \neq x_2$, no siempre se cumple $g(x_1) \neq g(x_2)$.

En (2) tenemos que $\forall x_1, x_2$ con x_1, $x_2 \in [0,2]$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$ y en (3) se tiene que no se cumple la propiedad anterior, o sea $\exists\ x_1, x_2 \in [-2,2]$ con $x_1 \neq x_2$ sin embargo, $g(x_1) = g(x_2)$.

Esto nos dice que la propiedad, que a números diferentes asigna imágenes diferentes, es local, es decir, una propiedad que depende de donde se tomen los valores de x y de la naturaleza de la función; definamos este comportamiento.

DEFINICIÓN 1.5.1

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que *f* es inyectiva, o uno a uno, en A si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

De esta forma se puede decir que $f(x) = x + 1$ es una función inyectiva en $\mathbb{R}$, que $g(x) = x^2$ es una función inyectiva en $[0,2]$ y que no es inyectiva en $[-2,2]$.

Problema 1.5.1

Demostrar que $f(x) = x + 1$ es una función inyectiva en $\mathbb{R}$.

Demostración

¿Qué significa que *f* sea inyectiva en $\mathbb{R}$?

Que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Para probar esto, tomemos una pareja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios con $x_1 \neq x_2$ y se debe deducir que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Se tiene que si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1$ pero como $f(x_1) = x_1 + 1$ y $f(x_2) = x_2 + 1$ se concluye que $f(x_1) \neq f(x_2)$, luego como x_1, x_2 son arbitrarios, tenemos que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; por lo tanto *f* es una función inyectiva en $\mathbb{R}$.

Problema 1.5.2

Demostrar que $g(x) = x^2$ es inyectiva en $\left[0, +\infty\right)$.

Demostración

¿Qué significa que *g* sea inyectiva en $\left[0, +\infty\right)$?

Que $\forall x_1, x_2 \in \left[0, +\infty\right)$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (definición 1.5.1). Para demostrar esto tomemos una pareja $x_1, x_2 \in \left[0, +\infty\right)$ arbitrara que cumpla $x_1 \neq x_2$ y se debe probar que $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Como $x_1 \neq x_2$ se puede suponer que $x_1 < x_2$ y de esta manera se tendrá $0 \leq x_1 < x_2$.

Sabemos que si $0 \le a < b$ y $0 \le c < d \Rightarrow ac < bd$, utilizando este resultado tenemos que $x_1^2 < x_2^2$ pero como $g(x_1) = x_1^2$ y $g(x_2) = x_2^2$ se tiene que $g(x_1) < g(x_2)$, de esta manera se concluye que $g(x_1) \ne g(x_2)$, que era nuestro objetivo.

Como x_1, x_2 son elementos arbitrarios de $\left[0, +\infty\right)$ concluimos que $\forall x_1, x_2 \in \left[0, +\infty\right)$ si $x_1 \ne x \Rightarrow g(x_1) \ne g(x_2)$, así tenemos que g es una función inyectiva en $\left[0, +\infty\right)$.

Problema 1.5.3

Demostrar que $h(x) = \operatorname{sen}\left(x\right)$ no es una función inyectiva en $\mathbb{R}$.

Solución

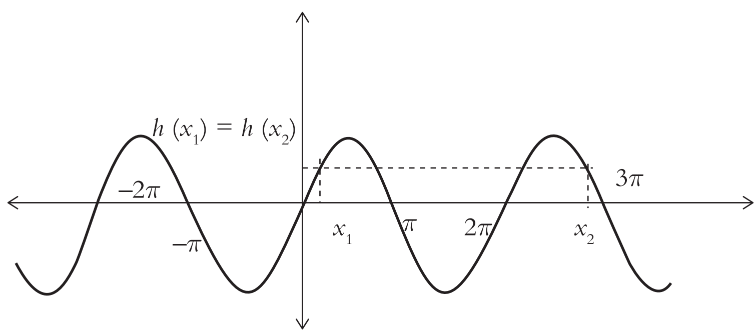
Observando la gráfica de h se puede apreciar que no siempre números diferentes tendrán asignadas imágenes diferentes (ver figura 4).

¿Qué significa que h no sea inyectiva en $\mathbb{R}$?

Primero, que h sea inyectiva en $\mathbb{R}$ significa que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 \ne x_2 \Rightarrow h(x_1) \ne h(x_2)$ de esta manera, que h no sea inyectiva en $\mathbb{R}$, lo cual deseamos demostrar, significa negar lo anterior, es decir, que h no sea inyectiva en $\mathbb{R}$ significa que $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \ne x_2$ y $h(x_1) = h(x_2)$.

En estas condiciones, el problema consiste en encontrar, o proponer, una pareja de números diferentes tales que sus imágenes sean iguales.

Figura 4



De la figura 4, notamos que si elegimos a $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$, estos cumplen con $x_1 \neq x_2$ pero, $h(x_1) = \text{sen}(x_1) = \text{sen}(0) = 0$ y $h(x_2) = \text{sen}(x_2) = \text{sen}(\pi) = 0$, es decir $h(x_1) = h(x_2)$, esto nos dice que h no es una función inyectiva en $\mathbb{R}$.

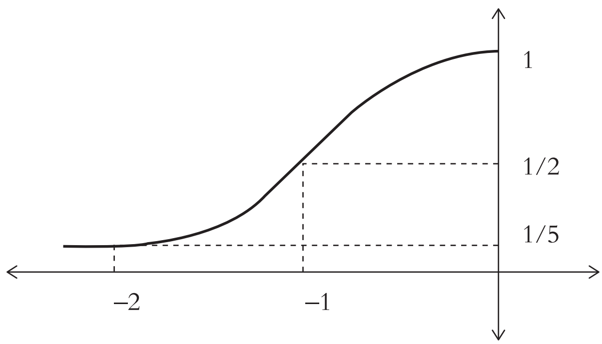
Problema 1.5.4

Demostrar que $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ es inyectiva en $(-\infty, 0)$.

Solución

La gráfica de g se muestra en la figura 5.

Figura 5



Preguntamos: ¿qué significa que g sea inyectiva en $(-\infty, 0)$?

Por la definición 1.5.1 se tiene que g es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ que cumple $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.

De esta manera se procede a seleccionar $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ arbitrarios con $x_1 \neq x_2$, nuestro objetivo es demostrar que se cumple $g(x_1) \neq g(x_2)$, es decir, $\dfrac{1}{x_1^2+1} \neq \dfrac{1}{x_2^2+1}$.

Como $x_1 \neq x_2$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $x_1 < x_2$, luego como ambos números son negativos se tiene $\dfrac{x_1}{x_2} > 1$ y también $1 > \dfrac{x_2}{x_1}$, estas dos últimas desigualdades nos dicen $\dfrac{x_1}{x_2} > 1 > \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} > \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1 \Rightarrow$ $\dfrac{1}{x_2^2+1} > \dfrac{1}{x_1^2+1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_2^2+1} \neq \dfrac{1}{x_1^2+1}$ lo que se quería demostrar.

Finalmente, como x_1, x_2 son arbitrarios se tiene que $\forall\, x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$ cumpliéndose con esto que g es una función inyectiva en $(-\infty, 0)$.

Dirijámonos hacia otro comportamiento. Para una función f si seleccionamos un $y_0 \in \mathbb{R}$, preguntamos: ¿y_0 será imagen de algún x_0?, es decir ¿existirá $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$? En algunos casos esto ocurrirá.

(4) Analicemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ (ver figura 6), ¿$y_0 = 4$ es imagen de algún $x_0 \in \mathbb{R}$? o sea ¿existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 4$? Sí, aún más, existen dos valores, $x_0 = 2$ cumple $f(x_0) = 4$ y también -2 cumple $f(-2) = 4$; se puede ver que si y_0 es como en la figura 6, existen dos números $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Ahora nos preguntamos (ver figura 7) ¿$y_0 = -4$ es imagen de algún número $x \in \mathbb{R}$?, o sea ¿existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = -4$? No, pues no hay un real x_0 que cumpla $f(x_0) = x_0^2 = -4$.

Figura 6

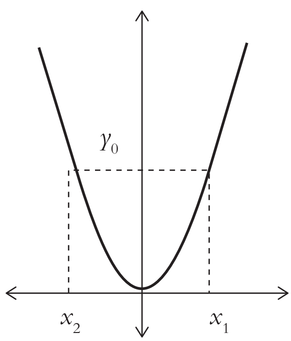
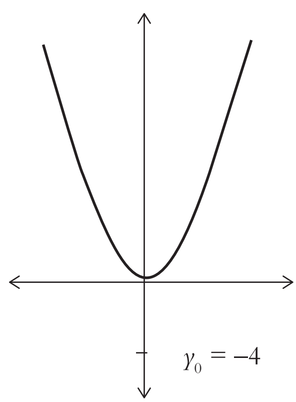


Figura 7



(5) Para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$ nótese que si $y_0 \in [0, 4]$, existirá siempre un $x_1 \in [-2, 2]$, por lo menos (existen dos) tal que $f(x_1) = y_0$ (figura 8).

Así también, notamos que si $y_1 = 5$, este no proviene de ningún número $x_1 \in [-2,2]$, es decir, para cualquier $x_1 \in [-2,2]$ se tendrá $f(x_1) \neq 5 = y_1$

(6) Sea *f* una función cuya gráfica es como en la figura 9; como en (4), se tiene que si $y \in B$ entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, escrito en lenguaje más formal diremos: $\forall\ y \in B\ \exists\ x \in A \ni f(x) = y$. Distingamos este comportamiento.

Figura 8

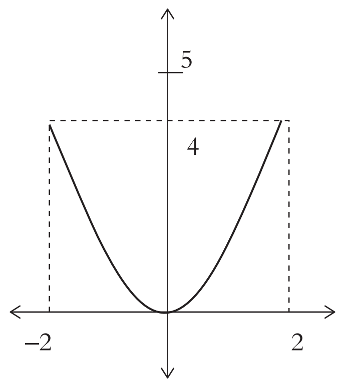
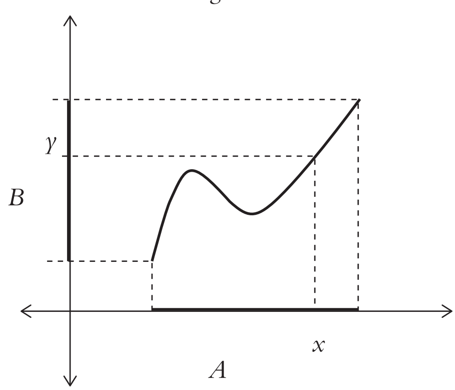


Figura 9



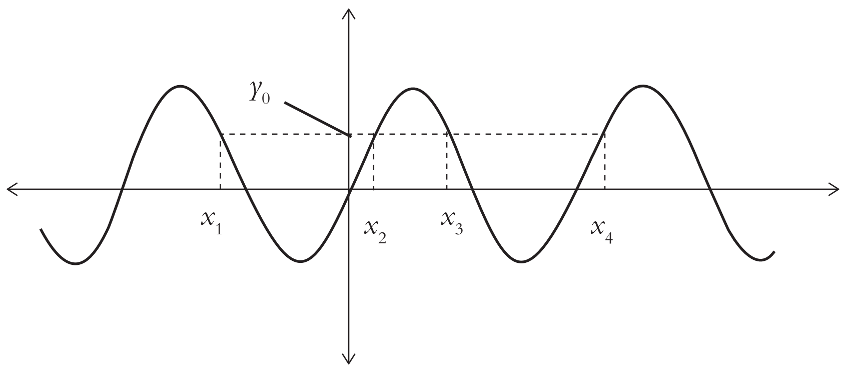
DEFINICIÓN 1.5.2

Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}$, diremos que *f* es suprayectiva o sobre de *A* en *B* si y sólo si $\forall\ y \in B \Rightarrow \exists\ x \in A \ni f(x) = y$.

Ejemplo 1.5.1

La figura 10 muestra una función sobre de $\mathbb{R}$ en $[-1,1]$, esta es $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Si tomamos y_0 en $[-1,1]$, se nota que existen, y en la figura podemos ver cuatro de ellos, x_1, x_2, x_3, x_4 tales que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = y_0$ (existe una infinidad de números x para los cuales $f(x) = y_0$), note que y_0 ha sido seleccionada arbitrariamente en $[-1,1]$, por lo tanto $\forall\ y \in [-1,1]\ \exists\ x \in \mathbb{R} \ni f(x) = y$.

Figura 10



Problema 1.5.5

Demostrar que $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ es una función sobre de $\mathbb{R}$ en $[0,\infty)$.

Solución

Preguntamos: ¿qué significa que g sea sobre de $\mathbb{R}$ en $[0,\infty)$?

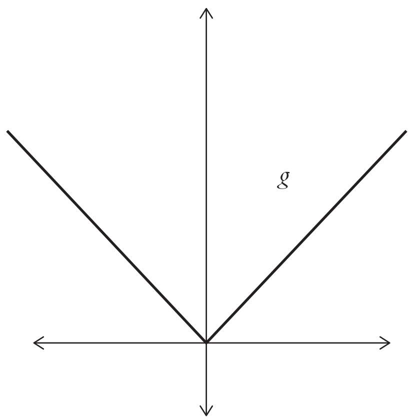
Que $\forall\ y \in [0,\infty)\ \exists\ x \in \mathbb{R} \ni f(x) = y$ (definición 1.5.2).

Para probar lo anterior, debemos tomar un $y_0 \in [0,\infty)$ arbitrario y nuestra tarea será construir, proponer o dar evidencia de la existencia de un $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = y_0$ (ver figura 11).

Como $y_0 \in [0,\infty) \Rightarrow y_0 \geq 0$ ¿Quién es ese x_0 buscado? proponemos a $x_0 = y_0$ y debemos verificar que $g(x_0) = y_0$.

Como $x_0 = y_0 \Rightarrow g(x_0) = g(y_0)$, pero como $y_0 \geq 0$ tendremos $g(y_0) = y_0$, por lo tanto $g(x_0) = y_0$, lo que se quería probar.

Figura 11



Como $y_0 \in [0,\infty)$ es arbitrario, se tiene $\forall\ y \in [0,\infty)\ \exists\ x \in \mathbb{R} \ni f(x) = y$, esto nos dice que f es sobre de $\mathbb{R}$ en $[0,\infty)$.

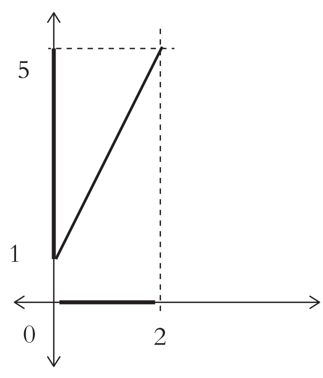
Problema 1.5.6

Demuestre que $h(x) = 2x + 1$ es sobre de [0,2] en [1,5].

Solución

La situación aparece en la figura 12.

Figura 12



¿Qué significa que h sea sobre de [0,2] en [1,5]?

Que $\forall\ y \in [1,5]\ \exists\ x \in [0,2]\ \ni\ h(x) = y$ (definición 1.5.2).

Para esto procedamos a seleccionar un $y_0 \in [1,5]$ arbitrario siendo nuestro objetivo construir o proponer un x_0 que cumpla con $h(x_0) = y_0$.

Como $y_0 \in [1,5] \Rightarrow 1 \leq y_0 \leq 5$; se desea encontrar un $x_0 \in [0,2]$ para el cual, $h(x_0) = y_0$, es decir, que $2x_0 + 1 = y_0$, si de esta expresión se despeja a x_0, se tiene que $x_0 = \dfrac{y_0 - 1}{2}$ quien es candidato a ser el número buscado, veamos que se cumple: $h(x_0) = y_0$ y $x_0 \in [0,2]$.

Primero $h(x_0) = 2\left(\dfrac{y_0 - 1}{2}\right) + 1 = (y_0 - 1) + 1 = y_0$.

Luego, como $1 \leq y_0 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq y_0 - 1 \leq 4 \Rightarrow \dfrac{0}{2} \leq \dfrac{y_0 - 1}{2} \leq \dfrac{4}{2} \Rightarrow 0 \leq \dfrac{y_0 - 1}{2} \leq 2$, de esta manera $x_0 \in [0,2]$.

De lo anterior se tiene que el x_0 buscando es $x_0 = \dfrac{y_0 - 1}{2}$; como y_0 es arbitrario se tiene que $\forall\ y \in [1,5]\ \exists\ x \in [0,2]\ \ni\ h(x) = y$, por lo tanto h es una función suprayectiva de $\left[0,2\right]$ en $\left[1,5\right]$.

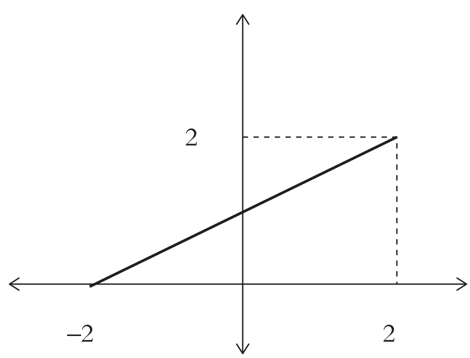
Problema 1.5.7

Demostrar que $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ no es una función sobre de $[-2,2]$en $[0,3]$.

Solución

La situación aparece en la figura 13.

Figura 13



¿Qué significa que f no sea sobre de $[-2,2]$en $[0,3]$?

Que f sea sobre de $[-2,2]$ en $[0,3]$, significa que $\forall\ y \in [0,3]\ \exists\ x \in [-2,2] \ni f(x) = y$ (definición 1.5.2), como lo que se desea demostrar es que f no es sobre de $[-2,2]$ en $[0,3]$, debemos probar la negación de lo anterior; de esta manera, que f no sea sobre de $[-2,2]$ en $[0,3]$ significa que $\exists\ y_0 \in [0,3] \ni \forall\ x \in [-2,2]$ se tiene $f(x) \neq y$.

De esta forma, el problema es construir o proponer un $y_0 \in [0,3] \ni f(x) \neq y_0$ para cualquier $x \in [-2,2]$.

¿Cómo construir o proponer ese y_0? La figura 13 nos da la idea de proponer un y_0 entre 2 y 3; sea $y_0 = \frac{5}{2}$ el elemento propuesto, este número y_0 cumple con estar en el intervalo [0,3] y con esto, sólo falta demostrar que $f(x) \neq \frac{5}{2}\ \forall x \in [-2,2]$, para lograr esto, seleccionemos un $x_0 \in [-2,2]$ arbitrario y veamos que $f(x_0) \neq \frac{5}{2}$.

Como $x_0 \in [-2,2] \Rightarrow -2 \leq x_0 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \frac{x_0}{2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x_0}{2} + 1 \leq 2$ y como $2 < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{2} + 1 < \frac{5}{2}$, pero $f(x_0) = \frac{x_0}{2} + 1$, esto nos dice $f(x_0) < \frac{5}{2}$ o sea, $f(x_0) \neq \frac{5}{2}$.

Como x_0 es arbitrario, concluimos que $f(x) \neq \frac{5}{2}\ \forall x \in [-2,2]$, por lo tanto f no es una función sobre de [-2,2] en [0,3].

Problema 1.5.8

Sea $h(x) = \frac{x}{1-|x|}$ con $h : (-1,1) \to \mathbb{R}$, demostrar que h es inyectiva y suprayectiva de $(-1,1)$ en $\mathbb{R}$.

Solución:

Primero demostremos que h es inyectiva en $(-1,1)$.

¿Qué significa que h sea uno a uno en $(-1,1)$?

Que $\forall x_1, x_2 \in (-1,1)$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$, entonces seleccionemos $x_1, x_2 \in (-1,1)$ arbitrarios con $x_1 \neq x_2$; con estos valores debemos probar que $h(x_1) \neq h(x_2)$ o sea $\frac{x_1}{1-|x_1|} \neq \frac{x_2}{1-|x_2|}$.

Observe que con $x_1 \neq x_2$ se tienen dos posibilidades: (i) $|x_1| = |x_2|$ o bien (ii) $|x_1| \neq |x_2|$.

Si la situación es como (i), tendremos:

$$1-|x_1| = 1-|x_2| \Rightarrow \frac{1}{1-|x_1|} = \frac{1}{1-|x_2|} \Rightarrow \frac{x_1}{1-|x_1|} \neq \frac{x_2}{1-|x_2|} \text{ o sea } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Si la situación es como en (ii), se tendrá $1-|x_1| \neq 1-|x_2| \Rightarrow \dfrac{1}{1-|x_1|} \neq \dfrac{1}{1-|x_2|}$, como en principio se tiene $x_1 \neq x_2$ preguntamos, ¿es inmediato $\dfrac{x_1}{1-|x_1|} \neq \dfrac{x_2}{1-|x_2|}$?

En general el hecho de que $a \neq b$ y $c \neq d$ no implica $ad \neq cd$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, esto contesta nuestra pregunta; recalcamos que la desigualdad si se cumple pero demostraremos su validez por el método de contradicción.

Supongamos entonces que dado (ii) no se cumple la desigualdad, o sea, $\dfrac{x_1}{1-|x_1|} = \dfrac{x_2}{1-|x_2|} \Rightarrow \left|\dfrac{x_1}{1-|x_1|}\right| = \left|\dfrac{x_2}{1-|x_2|}\right| \Rightarrow \dfrac{|x_1|}{1-|x_1|} = \dfrac{|x_2|}{1-|x_2|}$ ya que las cantidades de los denominadores son positivas por ser x_1, x_2 elementos de $(-1,1)$.

Continuando con la última expresión obtenemos:

$$\frac{|x_1|}{1-|x_1|}\left(1-|x_2|\right) = |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{1-|x_1|} - \frac{|x_1|}{1-|x_1|}|x_2| = |x_2| \Rightarrow$$

$$\frac{|x_1|}{1-|x_1|} = |x_2|\left(\frac{|x_1|}{1-|x_1|} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{|x_1|}{1-|x_1|} = |x_2|\left(\frac{|x_1| + 1 - |x_1|}{1-|x_1|}\right) \Rightarrow \frac{|x_1|}{1-|x_1|} = \frac{|x_2|}{1-|x_1|} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

Lo que contradice el hecho de que $|x_1| \neq |x_2|$, por tanto es falso suponer $\dfrac{x_1}{1-|x_1|} = \dfrac{x_2}{1-|x_2|}$, de donde $\dfrac{x_1}{1-|x_1|} \neq \dfrac{x_2}{1-|x_2|}$ es verdadera, teniéndose así $h(x_1) \neq h(x_2)$.

De (i) y (ii) se resume que si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$, luego, como x_1 y x_2 son arbitrarios, se tendrá $\forall\, x_1, x_2 \in (-1,1)$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow h(x_1) \neq h(x_2)$, lo cual significa que h es una función uno a uno en $(-1,1)$.

Ahora demostremos que h es sobre de $(-1,1)$ en $\mathbb{R}$ ¿Qué significa que h sea sobre de $(-1,1)$ en $\mathbb{R}$? Que $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\ x \in (-1,1)\ \ni\ h(x) = y$.

Para esto, sea $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y construyamos un $x_0 \in (-1,1)\ \ni\ h(x_0) = y_0$, o equivalentemente $\dfrac{x_0}{1-|x_0|} = y_0$. Para construir x_0, se empieza por despejar $|x_0|$ de la expresión $\dfrac{|x_0|}{1-|x_0|} = |y_0|$ que proviene de la última igualdad.

$$|x_0| = |y_0|(1-|x_0|) \Rightarrow |x_0| = |y_0| - |x_0||y_0| \Rightarrow$$

$$|x_0| + |y_0||x_0| = |y_0| \Rightarrow |x_0|(1+|y_0|) = |y_0| \Rightarrow |x_0| = \frac{|y_0|}{1+|y_0|}$$

sustituyendo esto en $\dfrac{x_0}{1-|x_0|} = y_0$ tendremos $\dfrac{x_0}{1-\dfrac{|y_0|}{1+|y_0|}} = y_0 \Rightarrow \dfrac{x_0}{\dfrac{1+|y_0|-|y_0|}{1+|y_0|}} = y_0 \Rightarrow$

$\dfrac{x_0}{\dfrac{1}{1+|y_0|}} = y_0 \Rightarrow\ x_0 = \dfrac{y_0}{1+|y_0|}$; veamos que el x_0 encontrado, cumple con $h(x_0) = y_0$ y con $x_0 \in (-1,1)$:

$$h(x_0) = h\left(\frac{y_0}{1+|y_0|}\right) = \frac{\dfrac{y_0}{1+|y_0|}}{1-\left|\dfrac{y_0}{1+|y_0|}\right|} \Rightarrow h(x_0) = \frac{\dfrac{y_0}{1+|y_0|}}{1-\dfrac{|y_0|}{1+|y_0|}} = \frac{\dfrac{y_0}{1+|y_0|}}{\dfrac{1+|y_0|-|y_0|}{1+|y_0|}} \Rightarrow$$

$h(x_0) = y_0$.

Para ver que $x_0 \in (-1,1)$ se debe probar que $-1 \leq x_0 \leq 1$, lo que equivale a tener $|x_0| < 1$:

Como $x_0 = \dfrac{y_0}{1+|y_0|}$ se tiene $|x_0| = \left|\dfrac{y_0}{1+|y_0|}\right| = \dfrac{|y_0|}{1+|y_0|} < 1$ esto nos dice $x_0 \in (-1,1)$.

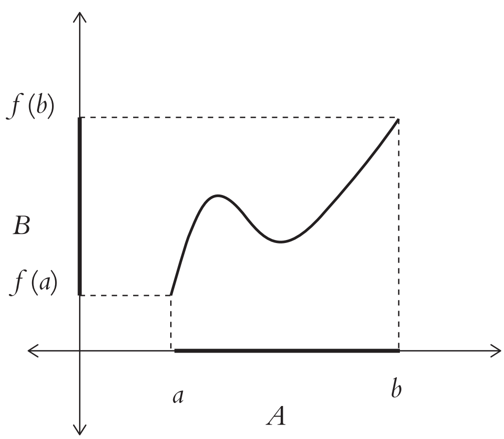
En resumen, para el $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario $\exists\, x_0 \in (-1,1) \ni h(x_0) = y_0$, de esta manera, se concluye que $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\ x \in (-1,1) \ni f(x) = y$, por lo tanto, *h* es una función sobre de $(-1,1)$ en $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1.5.3

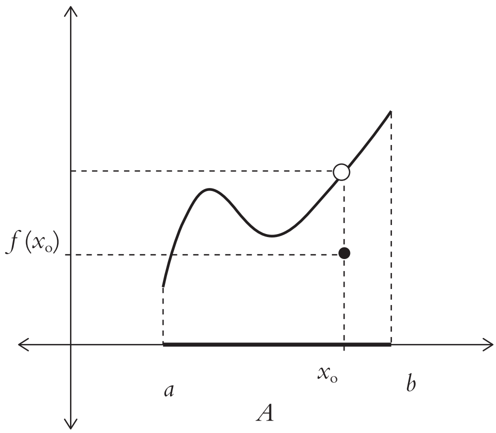
Si una función es uno a uno y sobre, diremos que es biyectiva.

EJERCICIOS

1.5.1 De la figura, diga si el trazo puede representar a la gráfica de una función suprayectiva de *A* en *B*.



1.5.2. De la figura, diga si el trazo puede representar a la gráfica de una función uno a uno en *A*.



1.5.3 Demuestre que $f(x) = x^3$ es una función uno a uno en $\mathbb{R}$.

1.5.4 Demuestre que $g(x) = -2x + 1$ es suprayectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

1.5.5 Demuestre que $h(x) = x^2$ no es uno a uno en $\mathbb{R}$, y también, que no es sobre de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

1.5.6 ¿Si f es sobre de A en $\mathbb{R}$ y $B \subseteq A \Rightarrow f$ es sobre de B en $\mathbb{R}$?

1.5.7 ¿Si f es uno a uno en B y $B \subseteq A \Rightarrow f$ es uno a uno en A?

Sección 1.6. Funciones monótonas

Cuando una función es monótona se dirá que la función posee determinada característica en un cierto subconjunto de los números reales, de tal manera que esta función crecerá, decrecerá, no crecerá, o bien, no decrecerá.

(1) Sea la función $f(x) = x^2 - 1$, cuya gráfica se presenta en la figura 1.

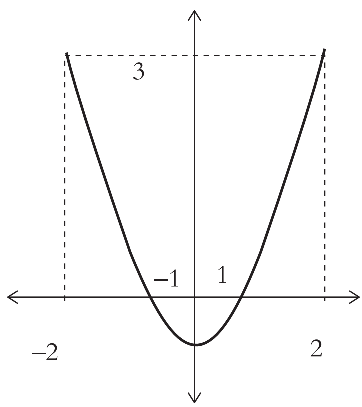
Para $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, x_3 = 3$ se tiene que sus imágenes son

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$f(x_2) = f(2) = (2)^2 - 1 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = (3)^2 - 1 = 8$$

Figura 1



Notemos que $x_1 < x_2 < x_3$ y también $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, además estos $x_1 < x_2 < x_3$, son números mayores o iguales a cero. ¿Si a_1, a_2, son números mayores o iguales a cero, arbitrarios, con $a_1 < a_2$ se tendrá $f(a_1) < f(a_2)$? Si, (dibuje una pareja); siempre que se tome una pareja $a_1, a_2 \geq 0$ con $a_1 < a_2$ se tendrá $f(a_1) < f(a_2)$

Ahora, ¿si tomamos una pareja cualquiera $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ con $a_1 < a_2$ se tendrá $f(a_1) < f(a_2)$? No siempre, puesto que podemos citar a $a_1 = -2$ y $a_2 = -1$, los cuales cumplen $a_1 < a_2$ y sin embargo $f(a_1) > f(a_2)$ ya que $f(a_1) = 3$ y $f(a_2) = 0$.

De lo anterior podemos decir que:

(a) Si $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 1$, se tendrá que

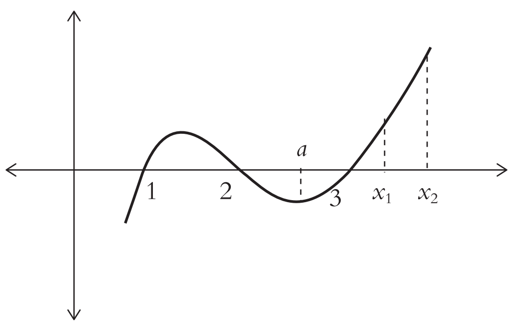
$$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty) \text{ si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 1$, no necesariamente se tendrá

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(2) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (ver figura 2).

Figura 2



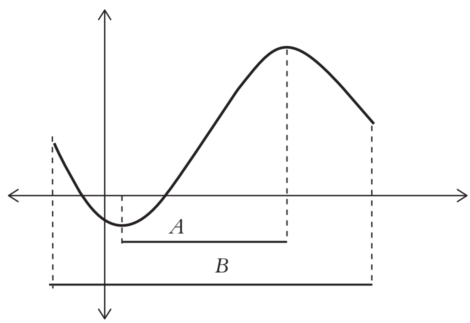
Note que si $a \leq x_1 < x_2$, las imágenes de x_1, x_2 estarán relacionadas como $f(x_1) < f(x_2)$.

De la gráfica podemos decir que, para cualquier pareja de números $x_1, x_2 \geq a$ que cumple con $x_1 < x_2$ entonces tendremos $f(x_1) < f(x_2)$.

¿Si tomáramos una pareja de $x_1, x_2 \in [2, \infty)$ con $x_1 < x_2$, se tendrá $f(x_1) < f(x_2)$? No, puesto que podemos citar a $x_1 = 2$ y $x_2 = 2.5$, donde estos valores cumplen $x_1, x_2 \in [2, \infty)$ con $x_1 < x_2$ pero no cumplen $f(x_1) < f(x_2)$, ya que $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = -0.375$.

(3) Sea f una función definida en B cuya gráfica se muestra en la figura 3; para esta situación se observa que $\forall x_1, x_2 \in A$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ y se observa que esta propiedad no siempre se cumple cuando tomamos las parejas en B.

Figura 3



DEFINICIÓN 1.6.1

Una función f es creciente en A si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Problema 1.6.1

Demostrar que $f(x) = x^2 - 1$ es una función creciente en $\left[0, +\infty\right)$

Solución

¿Qué significa que f sea creciente en $[0, +\infty[$?

Que $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (definición 1.6.1). Entonces, se debe seleccionar una pareja arbitraria $x_1, x_2 \in \left[0, +\infty\right)$ con $x_1 < x_2$ y deducir $f(x_1) < f(x_2)$.

Los valores tomados x_1, x_2 pueden cumplir lo siguiente:

(a) Como $0 \leq x_1 < x_2$, puede ocurrir que $0 = x_1$, si esto pasara, tendríamos que $0 = x_1^2 < x_2^2$ y en consecuencia $x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1$, y como $f(x_1) = x_1^2 - 1$

y $f(x_2)=x_2^2-1$, se cumplirá que $f(x_1)<f(x_2)$, llegando así a lo que se quería demostrar.

(b) Lo otro que puede ocurrir es que $0<x_1$, en este caso se tendrá $0<x_1<x_2$ de donde $\frac{x_1}{x_2}<1$ y $1<\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}<\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_1^2<x_2^2 \Rightarrow x_1^2-1<x_2^2-1$, pero como $f(x_1)=x_1^2-1$ y $f(x_2)=x_2^2-1$, se tiene que $f(x_1)<f(x_2)$.

Tanto de (a) como de (b) se obtiene $f(x_1)<f(x_2)$ con $x_1<x_2$ como antecedente.

Como $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ son arbitrarios, se cumplirá entonces que $\forall\, x_1,x_2\in[0,+\infty)$ si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, lo que nos dice que *f* es una función creciente en $[0,+\infty)$.

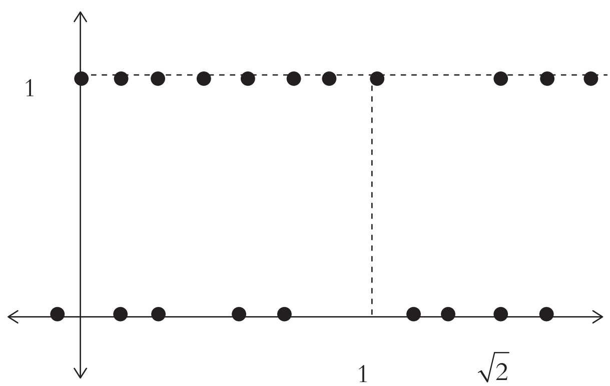
Problema 1.6.2

Demostrar que $g(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in I\end{cases}$ no es una función creciente en $\mathbb{R}$.

Solución

Un bosquejo de la gráfica de *g* se muestra en la figura 4.

Figura 4



¿Qué significa que *g* no sea creciente en $\mathbb{R}$? Si *g* fuera creciente en $\mathbb{R}$, se cumpliría que $\forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}$ si $x_1<x_2 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$ (definición 1.6.1); de esta manera

que g no es creciente en $\mathbb{R}$ significa negar lo anterior, o sea $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ donde $g(x_1) \geq g(x_2)$, de esta forma el problema es construir o proponer una pareja x_1, x_2, la cual cumpla $x_1 < x_2$ y también $g(x_1) \geq g(x_2)$. Para encontrar esta pareja, observe la gráfica de la función.

De la gráfica de g proponemos a $x_1 = 1$ y $x_2 = \sqrt{2}$; notamos que $x_1 < x_2$ y también $g(x_1) = 1$ y $g(x_2) = 0$, es decir, $g(x_1) \geq g(x_2)$, por lo tanto, 1 y $\sqrt{2}$ es la pareja buscada.

Con lo anterior concluimos que, efectivamente, g no es una función creciente en $\mathbb{R}$.

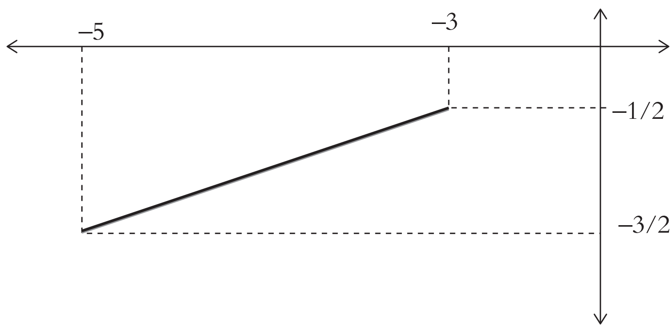
Problema 1.6.3

Demostrar que $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$ es una función creciente en $\left[-5, -3\right]$.

Solución

Geométricamente la situación aparece en la figura 5.

Figura 5



¿Qué significa que f sea creciente en [–5,–3]?

Que $\forall x_1, x_2 \in [-5, -3]$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (definición 1.6.1). De esta manera, el problema consiste en tomar una pareja $x_1, x_2 \in \left[-5, -3\right]$ arbitraria que cumpla $x_1 < x_2$ y deducir a partir de esto, que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{2} < \frac{x_2}{2} \Rightarrow \frac{x_1}{2} + 1 < \frac{x_2}{2} + 1$ pero $f(x_1) = \frac{x_1}{2} + 1$ y $f(x_2) = \frac{x_2}{2} + 1$, esto dice que $f(x_1) < f(x_2)$, por arbitrariedad de x_1, x_2 se concluye que f es creciente en $[-5, -3]$.

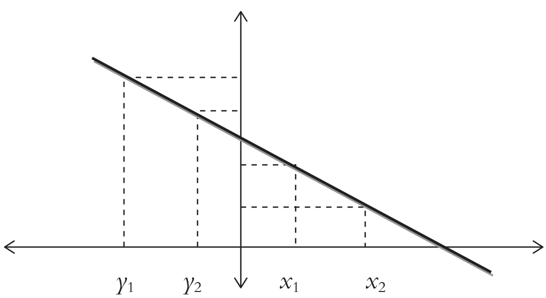
Veamos otro comportamiento:

(4) Sea la función $f(x) = -x + 1$, su gráfica se muestra en la figura 6.

Si se toma $x_1 = \frac{1}{4}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$ como en la figura 6, se tiene que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) = \frac{3}{4}$ y $f(x_2) = \frac{1}{2}$ es decir $f(x_1) > f(x_2)$.

En la figura 6 se observa para los valores y_1, y_2 con $y_1 < y_2$, que cumplen $f(y_1) > f(y_2)$ ¿Se puede concluir que si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ para cualquier pareja x_1, x_2?

Figura 6

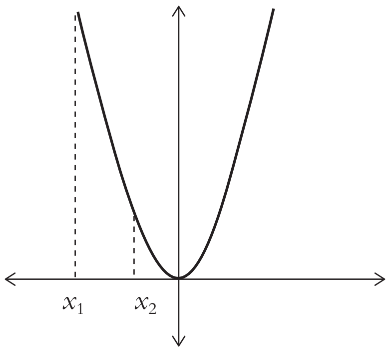


De la situación geométrica se desprende una respuesta afirmativa.

(5) Para la función $h(x) = x^2$, se observa que si x_1, x_2 son como en la figura 7, con $x_1 < x_2$ se tendrá $h(x_1) > h(x_2)$. Nótese que $x_1, x_2 \in [-\infty, 0]$.

¿Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son arbitrarios, con $x_1 < x_2$ se cumplirá $h(x_1) > h(x_2)$? No, puesto que tenemos a $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, donde $x_1 < x_2$ y sin embargo $h(x_1) < h(x_2)$ (ver figura 7).

Figura 7

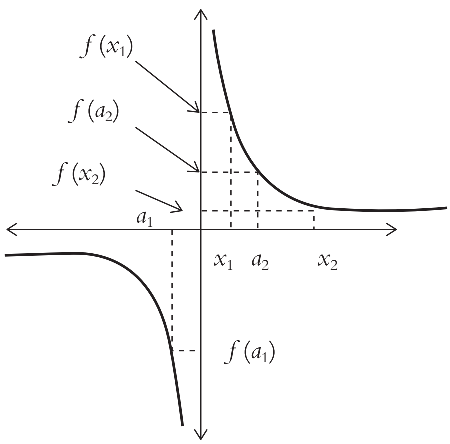


(6) Ahora, para la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se tiene que si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ con $x_1,x_2 \in \left(0,+\infty\right)$.

Si $a_1,a_2 \in \mathbb{R}-\{0\}$ por ejemplo, como en la figura 8, se tiene que $a_1<a_2$ pero no siempre se cumple $f(a_1)>f(a_2)$.

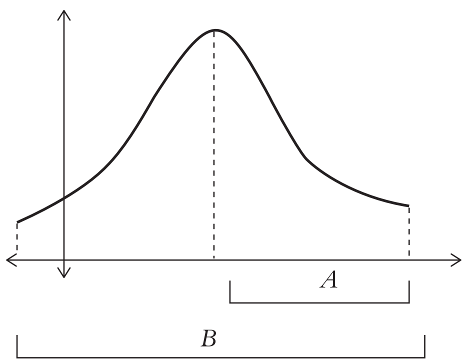
Podemos concluir que $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ se cumple en ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Figura 8



(7) Si tenemos una función como en la figura 9, notamos que para toda pareja $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ siempre se cumple $f(x_1) > f(x_2)$; este comportamiento no se cumple para cualquier pareja que se toma en el conjunto *B*.

Figura 9



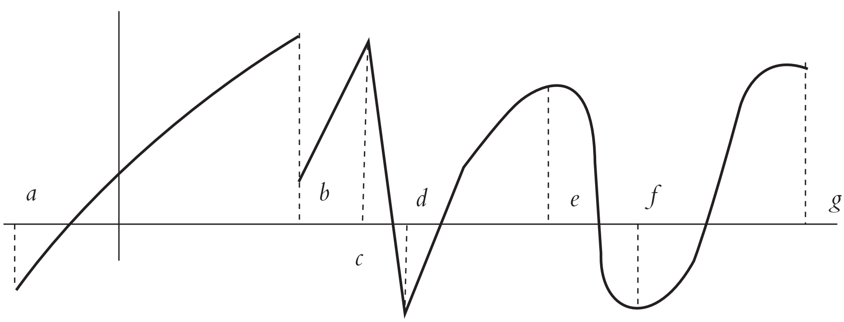
DEFINICIÓN 1.6.2

Una función *f* es decreciente en *A* si y sólo si $\forall\, x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplo 1.6.1

Decir de la gráfica de la función, en qué intervalos se comporta como una función creciente o decreciente (figura 10).

Figura 10



Solución

En los intervalos $[a,b],(b,c],[d,e],[f,g]$ [la función es creciente y en $[c,d],[e,f]$ la función es decreciente.

Problema 1.6.4

Demostrar que $f(x)=-x+1$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

Solución

¿Qué significa que *f* sea decreciente en $\mathbb{R}$?

Que $\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (definición 1.6.2).

Entonces tomemos $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios con $x_1 < x_2$ y demostremos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1+1 > -x_2+1$ pero $f(x_1)=-x_1+1$ y $f(x_2)=-x_2+1$, de donde $f(x_1) > f(x_2)$, luego por arbitrariedad de x_1,x_2 se tiene que $\forall x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, por lo tanto *f* es decreciente en $\mathbb{R}$.

Problema 1.6.5

Sea $g(x)=\dfrac{1}{x}$ demuestre que *g:*

a) es decreciente en $(0,+\infty)$
b) no es creciente en $\mathbb{R}-\{0\}$
c) no es decreciente en $\mathbb{R}-\{0\}$

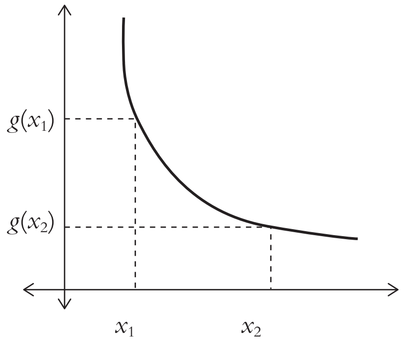
Solución (a)

¿Qué significa que *g* sea decreciente en $(0,+\infty)$? (ver figura 11).

Que $\forall x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ (definición 1.6.2).

Para demostrar lo anterior debemos tomar una pareja arbitraria $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ con $x_1 < x_2$, de ahí demostrar $g(x_1) > g(x_2)$.

Figura 11



Como $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ pero $g(x_1) = \frac{1}{x_1}$ y $g(x_2) = \frac{1}{x_2}$, por lo tanto se concluye $g(x_1) > g(x_2)$ que es lo que se quería demostrar.

Ahora, como x_1, x_2 son elementos arbitrarios tenemos que $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$, por lo tanto, g es una función decreciente en $(0, +\infty)$.

Solución (b)

¿Qué significa que g no sea creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$? (ver figura 12). Si g fuera creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$ significaría que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ (definición 1.6.1), de esta manera, que g no sea creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$ significa que $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \ni x_1 < x_2$ y $g(x_1) \geq g(x_2)$.

De esta forma, el problema es construir o proponer una pareja de números $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ con $x_1 < x_2$ y que cumplan $g(x_1) \geq g(x_2)$.

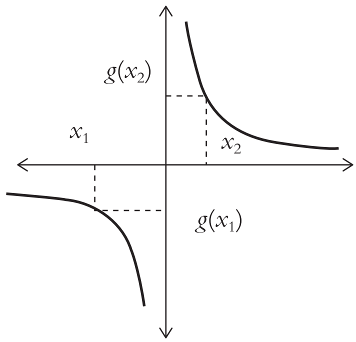
Con ayuda de la figura 12 proponemos que $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$ y observamos que $x_1 < x_2$ y $g(x_1) = \frac{1}{1/2} = 2$, $g(x_2) = 1$ es decir $g(x_1) \geq g(x_2)$.

De esta manera, los números buscados son $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$ por lo tanto, g no es creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Solución (c)

¿Qué significa que g no sea decreciente en $\mathbb{R}-\{0\}$? (ver figura 12). Primeramente, que g sea decreciente en $\mathbb{R}-\{0\}$ significa que $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{0\}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ (definición 1.6.2), de esta manera, que g no es creciente en $\mathbb{R}-\{0\}$ significa negar lo anterior, es decir, que $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{0\} \ni x_1 < x_2$ con $g(x_1) \leq g(x_2)$.

Figura 12



Entonces el problema radica en construir o proponer una pareja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{0\}$ que cumpla $x_1 < x_2$ y $g(x_1) \leq g(x_2)$.

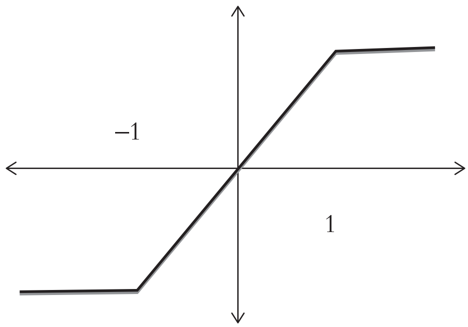
Para lo anterior proponemos a $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, para los cuales se tiene $x_1 < x_2$ y $-1 = g(x_1) \leq g(x_2) = 1$, de donde se desprende que g no es una función decreciente en $\mathbb{R}-\{0\}$.

(8) Analicemos un tercer tipo de comportamiento.

$$\text{Sea } f(x)\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \text{ (figura 13)}$$

Esta función tiene un comportamiento tal, que en algunos lugares se mantiene constante y en otros crece. Nótese que si $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1/2$, $x_4 = 1/2$, $x_5 = 8$, $x_6 = 10$, sus imágenes son $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = -1$, $f(x_3) = -\frac{1}{2}$, $f(x_4) = \frac{1}{2}$, $f(x_5) = 1$ $f(x_6) = 1$, esto es: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ y $f(x_1) = f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5) = f(x_6)$.

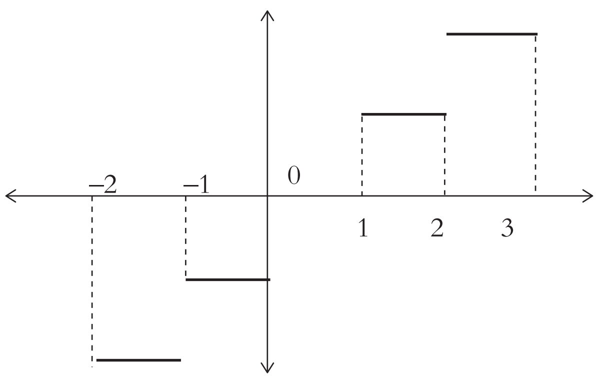
Figura 13



Ahora, si se toma una pareja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ donde x_1, x_2 pueden estar colocados en cualquier lugar de la recta real, preguntamos ¿qué tipo de relación espera encontrar entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$? Podemos esperar que $f(x_1) = f(x_2)$ o bien $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ es decir, en general esperamos $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(9) La función $g(x) = \left[x\right]$ (función parte entera; a x le asocia el numero entero más cercado a su izquierda) (ver figura 14).

Figura 14



Si $x_1 = 5/4$ y $x_2 = 3/2$ tendremos $x_1 < x_2$ y también $\left[\dfrac{5}{4}\right] = g(x_1) = g(x_2) = \left[\dfrac{3}{2}\right] = 1.$

Si $x_3 = 5/4$ y $x_4 = 5/2$ se tendrá $g(x_3) = \left[\dfrac{5}{4}\right] = 1$ y $g(x_4) = \left[\dfrac{5}{2}\right] = 2.$

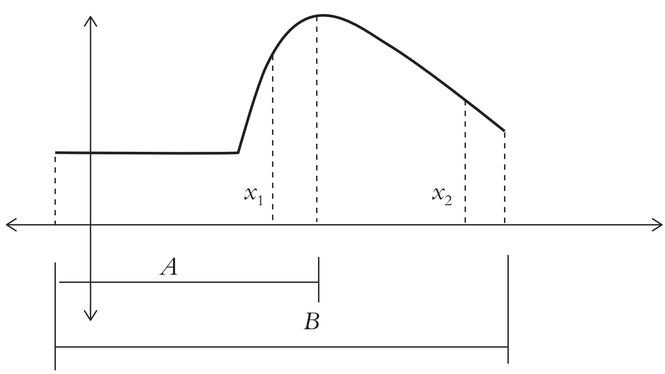
Preguntamos: ¿qué tipo de relación se espera tener entre $g(x_1)$ y $g(x_2)$ cuando x_1, x_2 están en cualquier posición en la recta real con $x_1 < x_2$? Lo mismo que en (8), esperamos en algunos casos tener $g(x_1) < g(x_2)$ y en otros $g(x_1) = g(x_2)$, en general esperamos tener $g(x_1) \leq g(x_2)$.

Tanto en (8) como en (9), se observa que estas funciones en ocasiones crecen y en otras permanecen constantes, estas funciones las podemos caracterizar, precisamente, por algo que no hacen, esto es, no decrecer.

(10) Recordemos que la propiedad de ser creciente o decreciente depende de donde una función tome valores, ¿ocurrirá lo mismo con el comportamiento exhibido por las funciones en (8) y en (9)? Es decir, ¿ocurrirá que la propiedad $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ depende de donde se tomen x_1 y x_2? Observe la figura 15, *f* está definida en *B*, si $x_1, x_2 \in A$ (arbitrarios) con $x_1 < x_2$, notamos que $f(x_1) \leq f(x_2)$, pero ¿si $x_1, x_2 \in B$ en general, con $x_1 < x_2$, tendremos $f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$? Los valores x_1, x_2 que aparecen en la figura 15 son tales que $x_1 < x_2$ y cumplen $f(x_1) > f(x_2)$ que es la negación de $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Entonces la propiedad $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para una función *f*, depende del conjunto donde se tomen los valores x_1, x_2 y, claro está, de la definición de la función.

Figura 15



DEFINICIÓN 1.6.3

Se dice que *f* es no-decreciente en *A* si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in A\; x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$.

¿Qué relación existe entre los comportamientos crecientes, decrecientes y no-decreciente?

(a) *f* es creciente en *A* si $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(b) *f* es decreciente en *A* si $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

(c) *f* es no-decreciente en *A* si $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Recuerde que si $a < b \Rightarrow a \leq b$, pero el recíproco no es cierto.

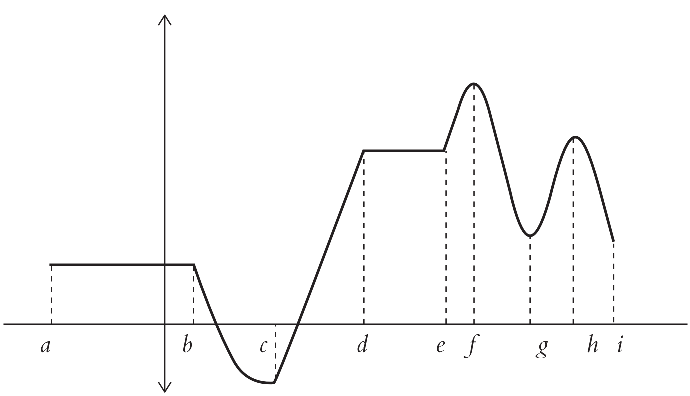
Si *f* es creciente en *A*, de (a) se tiene que $\forall x_1, x_2 \in A\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ y como $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, se tiene entonces que si *f* es creciente en $A \Rightarrow f$ es no-decreciente en *A*.

Nótese también que si *f* no es decreciente en *A*, esto no significa que *f* sea no-decreciente.

Ejemplo 1.6.2

De la gráfica de la función *f*, en la figura 16, se aprecian algunos intervalos donde la función es creciente, decreciente y no-decreciente.

Figura 16



(a) La función *f* es creciente en $[c,d],[e,f]$ y $[g,h]$.

(b) La función *f* es decreciente en $[b,c],[f,g]$ y $[h,i]$.

(c) La función *f* es no-decreciente en $[a,b],[c,e],[d,f]$ y $[c,f]$.

Problema 1.6.6

Demuestre que $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<-1 \\ x & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$ es una función no decreciente en $\mathbb{R}$.

Solución

¿Qué significa que *f* sea no-decreciente en $\mathbb{R}$? (figura 13) que $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$. Tomemos entonces una pareja arbitraria $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y a partir de esto deduzcamos $f(x_1)\le f(x_2)$.

La pareja tomada puede estar en alguna de las siguientes situaciones:

(i) $x_1 < x_2 < -1$

(ii) $x_1 < -1 \le x_2 \le 1$

(iii) $x_1 < -1$ y $1 < x_2$

(iv) $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$

(v) $-1 \le x_1 \le 1 < x_2$

(vi) $1 < x_1 < x_2$

Note que estas seis posibilidades son todas las que pueden ocurrir. En los seis casos se concluye $f(x_1)\le f(x_2)$

(i) Si $x_1 < x_2 < -1 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = -1 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

(ii) Si $x_1 < -1 \le x_2 \le 1 \Rightarrow f(x_1) = -1$ y $f(x_2) = x_2$ pero como $-1 \le x_2 = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

(iii) Si $x_1 < -1$ y $1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = -1$ y $f(x_2) = 1$ de esta forma $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

(iv) Si $-1 \le x_1 < x_2 \le 1 \Rightarrow f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = x_2$ pero como

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

(v) Si $-1 \le x_1 \le 1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = 1$ pero como

$x_1 \le 1 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

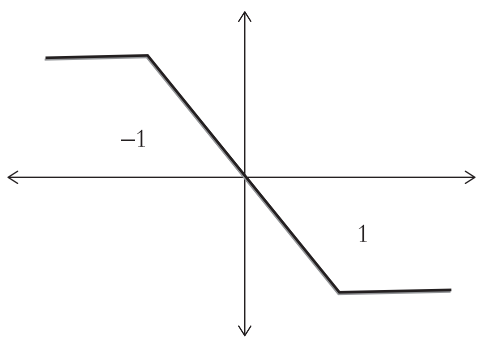
(vi) Si $1 < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 1 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

En los seis casos se concluye que $f(x_1) \le f(x_2)$; de esta manera, como x_1, x_2 son arbitrarios concluimos que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$, por lo tanto f es no-decreciente en $\mathbb{R}$.

Veamos ahora cuándo se dice que una función es no-creciente.

(11) Sea $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$ (figura 17)

Figura 17



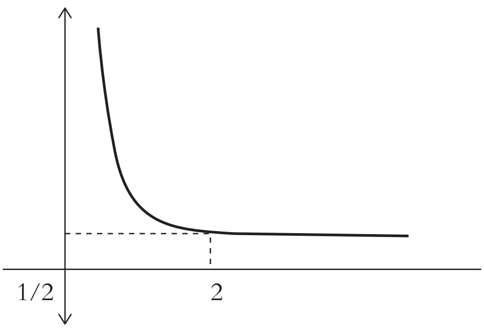
De la gráfica de esta función, se observa que en algunos intervalos las imágenes se mantienen constantes y en otras decrecen conforme los valores de x se tornan hacia la derecha.

Si tomamos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ ¿qué tipo de relación esperamos encontrar entre $h(x_1)$ y $h(x_2)$? Que $h(x_1) = h(x_2)$ o bien $h(x_1) > h(x_2)$ (dibuje algunas parejas si desea), es decir, se espera $h(x_1) \ge h(x_2)$.

(12) Sea $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si} \quad 0<x<2 \\ 1/2 & \text{si} \quad 2\leq x \end{cases}$ (figura 18)

La función f está definida en $(0,+\infty)$. En el intervalo $(0,2)$ la función f decrece y en el intervalo $[2,+\infty)$ la función se mantiene constante. De la misma manera que en la función anterior, la función f decrece o bien se mantiene constante.

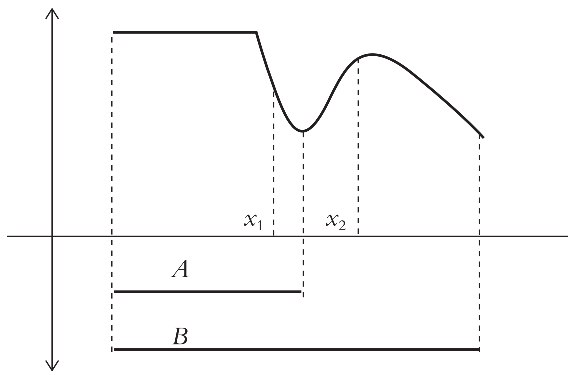
Figura 18



Aquí también preguntamos: si $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ con $x_1<x_2$, ¿qué relación esperamos encontrar entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$? Esperamos encontrar $f(x_1)=f(x_2)$ o bien $f(x_1)>f(x_2)$, esto es, $f(x_1)\geq f(x_2)$.

(13) Observemos la situación de la figura 19. Si $x_1,x_2\in A$ arbitrarios con $x_1<x_2$ se nota de la figura que $f(x_1)\geq f(x_2)$, pero ¿ocurre lo mismo si $x_1,x_2\in B$? Es decir, ¿para cualquier pareja $x_1,x_2\in B$ se tendrá $f(x_1)\geq f(x_2)$? No, puesto que existen $x_1,x_2\in B$, los cuales cumplen $x_1<x_2$ y sin embargo $f(x_1)<f(x_2)$. Luego entonces, la propiedad $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ depende de donde se tomen los valores x_1,x_2 y claro está, de la forma de la función.

Figura 19

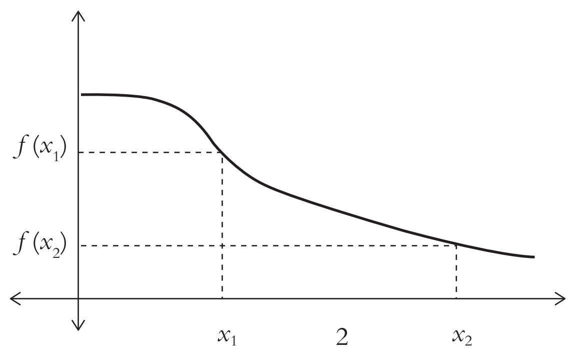


DEFINICIÓN 1.6.4

Diremos que f es no-creciente en A si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Ahora, cuando f es decreciente en A se tiene que $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, pero como $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ de esta forma se tendrá que si f es decreciente en $A \Rightarrow f$ es no-creciente en A.

Figura 20



Problema 1.6.7

Demostrar que $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ es una función no-creciente en $[0, +\infty)$.

Solución

Demostremos que g es decreciente y como decreciente implica no-creciente, tendremos la demostración (figura 20).

¿Qué significa que g sea decreciente en $\left[0,+\infty\right)$?

Que $\forall x_1, x_2 \in \left[0,+\infty\right)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ (definición 1.6.2). De esta manera, lo que se debe hacer es tomar una pareja $x_1, x_2 \in \left[0,+\infty\right)$ arbitraria, que cumpla $x_1 < x_2$ y de ahí deducir $g(x_1) > g(x_2)$.

Veamos que $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x_1^2+1} > \dfrac{1}{x_2^2+1}$ pero como $g(x_1) = \dfrac{1}{x_1^2+1}$ y $g(x_2) = \dfrac{1}{x_2^2+1}$ se concluye que $g(x_1) > g(x_2)$.

Como x_1, x_2 son arbitrarios, se concluye que $\forall x_1, x_2 \in \left[0,+\infty\right)$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$, por lo tanto g es decreciente en $[0,+\infty[$.

Finalmente, como g es decreciente en $\left[0,+\infty\right) \Rightarrow g$ es no-creciente en $\left[0,+\infty\right)$.

Problema 1.6.8

Demostrar que $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$.

¿Qué significa que f sea creciente en $\mathbb{R}$? Que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (definición 1.6.1).

Entonces tomemos una pareja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitraria que cumpla $x_1 < x_2$ y a partir de esto, concluir $f(x_1) < f(x_2)$.

Observe que x_1, x_2 pueden ubicarse en cualquiera de estas situaciones:

(i) $0 < x_1 < x_2$

(ii) $x_1 < x_2 < 0$

(iii) $x_1 < 0 < x_2$

(iv) $0 = x_1 < x_2$

(v) $x_1 < x_2 = 0$

Analicemos cada caso:

(i) Si $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2 x_1 < x_2^2 x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) Si $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$ (ver problema 1.5.4), luego como $x_1 < x_2 < 0$ tenemos que $-x_1 > -x_2 > 0$, de esta manera $(-x_1)(x_1^2) > (-x_2)(x_2^2) \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3$ multiplicado por (-1) se tendrá $x_1^3 < x_2^3$ y de esta forma $f(x_1) < f(x_2)$.

(iii) Si $x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < 0 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(iv) Si $0 = x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 = 0$ y $x_2^3 > 0 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(v) Si $x_1 < x_2 = 0 \Rightarrow x_1^3 < 0$ y $x_2^3 = 0 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

En todos los casos se concluye $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrarios, por lo tanto se tiene que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, esto nos dice que f es una función creciente en $\mathbb{R}$.

Para finalizar esta sección, nos preguntamos ¿existe una relación entre los conceptos de que una función sea creciente o decreciente con el concepto de inyectividad? (figura 21).

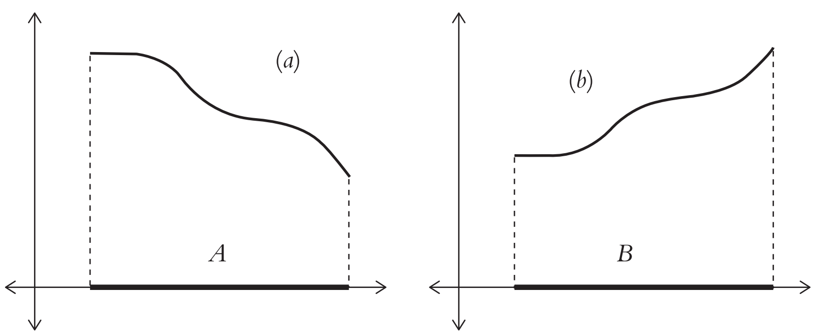
Se pueden elaborar dos proposiciones:

(a) Si f creciente o decreciente en $A \Rightarrow f$ es inyectiva en A.

(b) Si f es inyectiva en $A \Rightarrow f$ es creciente o decreciente en A.

Demostraremos que la afirmación (a) es verdadera y la (b) es falsa en general.

Figura 21



Afirmación 1.6.1

Si f es creciente o decreciente en $A \Rightarrow f$ es inyectiva en A.

Demostración

Supongamos que f es creciente en A y probemos que la función es inyectiva en A (figura 21).

Ahora preguntamos: ¿qué significa que f sea inyectiva en A? Que $\forall x_1, x_2 \in A$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (definición 1.5.1). Tomemos entonces una pareja $x_1, x_2 \in A$ arbitraria con $x_1 \neq x_2$ y deduzcamos $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Para los valores seleccionados se puede tener:

(i) $x_1 < x_2$ o (ii) $x_2 < x_1$

Como hipótesis f es creciente en A se tiene que de (i) o (ii) que $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_2) < f(x_1)$ respectivamente, en ambos casos se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Como x_1, x_2 son arbitrarios, concluimos que $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, por lo tanto f es una función inyectiva en A.

El caso en que f es decreciente en A se procede de manera análoga; finalmente la afirmación es cierta.

Ahora demostraremos que es falso que si f es inyectiva en $A \Rightarrow f$ es creciente o decreciente.

¿Cómo ver esto? Exhibiendo una función inyectiva en algún intervalo pero que no sea ni creciente ni decreciente.

¿Qué función? La función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si} \quad x \in I \end{cases}$ (figura 22)

La figura 22 nos dice, por sí misma, que la función f no es creciente ni decreciente en $\mathbb{R}$ que es el conjunto donde está definida la función f.

(a) f no es creciente en $\mathbb{R}$: ¿qué significa que f no sea creciente en $\mathbb{R}$? Que f sea creciente en $\mathbb{R}$ significa que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (definición 1.6.1), de esta manera que f no sea creciente en $\mathbb{R}$ significa que $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Ahora el problema es construir o proponer una pareja $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ que cumpla $x_1 < x_2$ y $f(x_1) \geq f(x_2)$; para esto proponemos a $x_1 = 1$ y a $x_2 = \sqrt{2}$,

entonces $f(x_1)=f(1)=2\geq\sqrt{2}=f(\sqrt{2})=f(x_2)$, que es lo que se quería probar, por lo tanto *f* no es creciente en $\mathbb{R}$.

(b) *f* no es decreciente en $\mathbb{R}$: ¿qué significa que *f* no sea decreciente en $\mathbb{R}$? Que *f* sea decreciente en $\mathbb{R}$ significa que $\forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}$ con $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ (definición 1.6.2), de esta manera, que *f* no sea decreciente en $\mathbb{R}$ significa que $\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$ con $x_1<x_2$ y $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Como anteriormente se hizo, debemos proponer o construir una pareja $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ que cumpla $x_1<x_2$ y $f(x_1)\leq f(x_2)$. Para esto proponemos a $x_1=1$ y a $x_2=2$, con esta pareja tenemos $x_1<x_2$ y como $f(x_1)=2$ y $f(x_2)=4$ se tiene $f(x_1)<f(x_2)$, de donde podemos implicar $f(x_1)\leq f(x_2)$, de esta manera, concluimos que *f* no es una función decreciente.

(c) Finalmente demostremos que *f* es inyectiva en $\mathbb{R}$ ¿Qué significa que *f* es inyectiva en $\mathbb{R}$? Que $\forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}$ si $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ (definición 1.5.1). El problema es entonces tomar una pareja $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ arbitraria que cumpla con $x_1\neq x_2$ y con esto deducir $f(x_1)\neq f(x_2)$.

La pareja de números x_1,x_2 debe estar en las algunas de las siguientes situaciones:

(i) $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$

(ii) $x_1,x_2\in I$

(iii) $x_1\in\mathbb{Q}$ y $x_2\in I$

(iv) $x_1\in I$ y $x_2\in\mathbb{Q}$

Analicemos los cuatro incisos:

(i) Si $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$, como $x_1\neq x_2\Rightarrow 2x_1\neq 2x_2$ pero $f(x_1)=2x_1$ y $f(x_2)=2x_2$ de esta forma $f(x_1)\neq f(x_2)$.

(ii) Si $x_1,x_2\in I$, como $x_1\neq x_2$ y se sabe que $f(x_1)=x_1$ y $f(x_2)=x_2$ teniéndose que $f(x_1)\neq f(x_2)$.

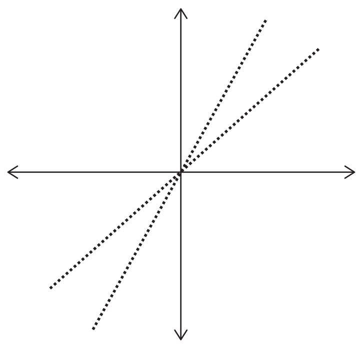
(iii) Si $x_1\in\mathbb{Q}$ y $x_2\in I$ con $x_1\neq x_2\Rightarrow 2x_1\neq x_2$ ya que $2x_1\in\mathbb{Q}$ y $x_2\in I$, luego $f(x_1)=2x_1$ y $f(x_2)=x_2$ de donde se concluye $f(x_1)\neq f(x_2)$.

(iv) Si $x_1 \in I$ y $x_2 \in \mathbb{Q}$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 \neq 2x_2$ ya que $x_1 \in I$ y $2x_2 \in \mathbb{Q}$ luego como $f\left(x_1\right) = x_1$ y $f(x_2) = 2x_2$ se concluye $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$.

En los cuatro casos se obtiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$ suponiendo $x_1 \neq x_2$; por arbitrariedad de x_1, x_2 se tiene que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, por lo tanto *f* es inyectiva en $\mathbb{R}$.

Así, la función *f* es inyectiva en $\mathbb{R}$ pero no es creciente ni decreciente, demostrando con esto que es falsa la afirmación que se hizo en (b).

Figura 22



EJERCICIOS

1.6.1 Demuestre que si $A \subseteq B$ y *f* es creciente en $B \Rightarrow f$ es creciente en A.

1.6.2 Demuestre que el recíproco del ejercicio anterior es falso en general.

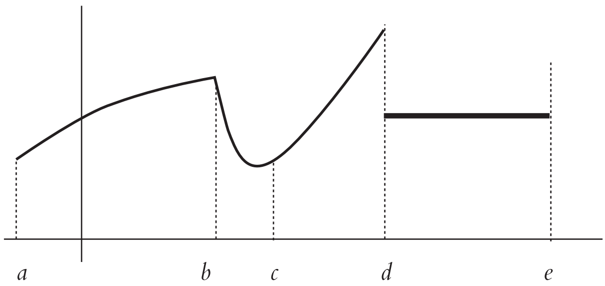
1.6.3 Si *f* es no-creciente y no-decreciente en A, ¿qué puede decir acerca de *f*?

1.6.4 Demuestre que $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 > x \end{cases}$ es una función no-creciente en $\mathbb{R}$ (sugerencia: ver el problema 1.6.6).

1.6.5 Demuestre que $f(x) = [x]$ es una función no decreciente en $\mathbb{R}$.

1.6.6 Diga en qué intervalos, la función cuya gráfica se muestra en la figura 23, es creciente, decreciente, no-creciente, no-decreciente.

Figura 23



Sección 1.7. Funciones acotadas

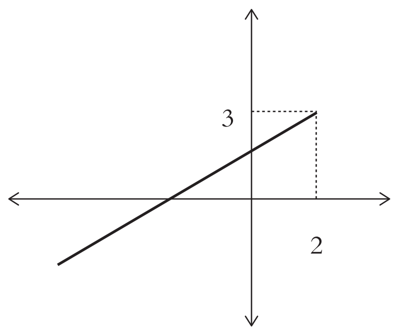
En esta última sección se estudiará el concepto de función acotada, acotada superiormente y acotada inferiormente; diremos que una función es acotada, cuando los valores de las imágenes de una función se ubican en un intervalo cerrado de la forma $[a,b]$. El concepto de función acotada es piedra angular para posteriores resultados sobre funciones continuas.

(1) Sea $f:(-\infty,2]\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x+1$.

La gráfica de *f* se muestra en la figura 1 y, de ésta, se puede observar que los valores de $f(x)$ no son mayores a 3, es decir $f(x)\leq 3$ siempre que $x\in(-\infty,2]$.

La existencia del número 3, como número distinguido que cumple $f(x)\leq 3$ cuando $x\in(-\infty,2]$ depende tanto del conjunto $(-\infty,2]$ como de la función *f*.

Figura 1



(2) Sea $g:[2,5]\to\mathbb{R}$ con $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

Las imágenes de la función *g* (figura 2), no sobrepasan 1, aún más, podemos decir que $g(x)$ no rebasa al 1/5 cuando $x\in[2,5]$, es decir, $g(x)\leq\dfrac{1}{5}\quad\forall x\in[2,5]$.

(3) Sea $h:(1,3)\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^2-2$, preguntamos ¿existe un número *M* que cumpla $h(x)\leq M\ \forall x\in(1,3)$? (observe la figura 3).

Figura 2

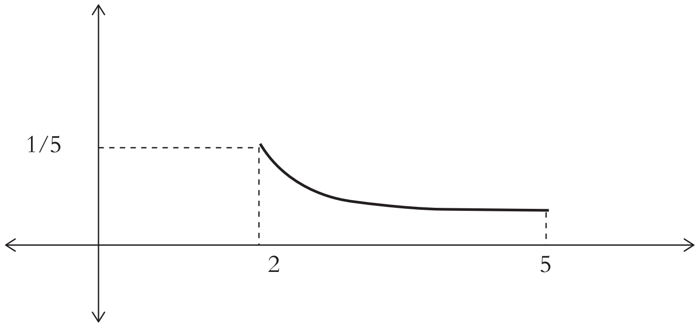
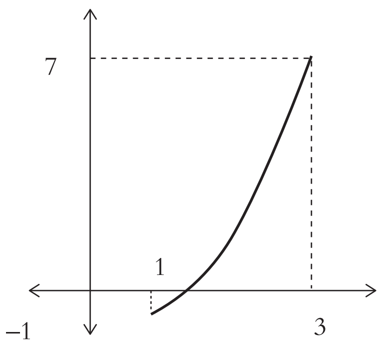


Figura 3



Se pregunta si existe un número M tal que $h(x) \leq M$ para cualquier $x \in (1,3)$.

La gráfica nos dice que, efectivamente, existe un número el cual siempre es mayor que $h(x)$ con $x \in (1,3)$.

Un posible candidato es el 7, sólo faltaría ver que se cumple $h(x) \leq 7 \ \forall x \in (1,3)$. Para demostrar lo anterior, tomemos un elemento x_0 arbitrario en el intervalo $(1,3)$ y concluyamos que $h(x_0) \leq 7$, es decir concluyamos $x_0^2 - 2 \leq 7$.

Como $x_0 \in (1,3) \Rightarrow 1 < x_0 < 3 \Rightarrow 1 < x_0^2 < 9 \Rightarrow x_0^2 < 7 + 2 \Rightarrow x_0^2 - 2 < 7$ y concluimos $h(x_0) \leq 7$.

Como x_0 es arbitrario se tiene $\forall x \in (1,3)\ h(x) \leq 7$, por lo tanto contestamos afirmativamente a la pregunta: efectivamente existe el número 7 el cual cumple $\forall x \in (1,3)\ h(x) \leq 7$.

En las situaciones mostradas en (1), (2) y (3) se dirá que:

En (1), existe 3 tal que $f(x) \leq 3 \quad \forall x \in (-\infty, 2]$

En (2), existe 1/5 tal que $g(x) \leq \frac{1}{5} \quad \forall x \in [2,5]$

En (3) existe 7 tal que $h(x) \leq 7 \quad \forall x \in (1,3)$

DEFINICIÓN 1.7.1

Diremos que f está acotada superiormente en A subconjunto de $\mathbb{R}$ si $\exists M \in \mathbb{R} \ni f(x) \leq M \quad \forall x \in A$.

Las tres funciones anteriormente vistas son acotadas superiormente, de acuerdo con la definición anterior.

Sea $I(x) = x$ con $x \in \mathbb{R}$ $(A = \mathbb{R})$ ¿Cómo demostrar que I no es acotada superiormente en $\mathbb{R}$? Si I fuera acotada superiormente en $\mathbb{R}$ se tendría que $\exists M \in \mathbb{R} \ni I(x) = x \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$, esto es equivalente a decir que los reales están acotados superiormente, lo cual es falso; por lo tanto no se puede tener que I es acotada superiormente en $\mathbb{R}$.

Problema 1.7.1

Sea $f(x) = 2x$, demostrar que f es acotada superiormente en $[6,4)$

Solución

Gráficamente la situación del problema aparece en la figura 4.

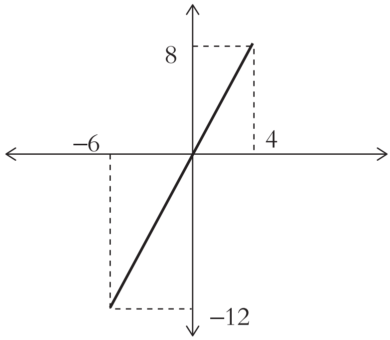
¿Qué significa que f sea acotada superiormente en $[6,4)$? Que $\exists M \in \mathbb{R} \ni f(x) \leq M \quad \forall x \in [-6,4)$ (definición 1.7.1).

El problema es construir o proponer (o dar evidencia de su existencia) un número M el cual cumpla $f(x) \leq M \quad \forall x \in [-6,4)$.

De la figura 4 proponemos a M = 8 siendo ahora nuestro objetivo demostrar que se cumple

$$f(x) \leq 8 \quad \forall x \in [-6,4).$$

Figura 4

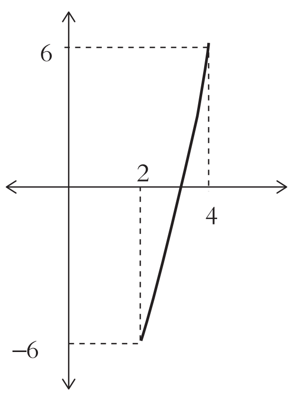


Para demostrar lo anterior, tomemos un $x_0 \in [-6,4)$ arbitrario y deduzcamos que se cumple $f(x_0) \leq 8$.

Procediendo $x_0 \in [-6,4) \Rightarrow -6 \leq x_0 < 4 \Rightarrow x_0 < 4 \Rightarrow 2x_0 < 8$ pero $f(x_0) = 2x_0$, por lo tanto f es acotada superiormente en $[-6,4)$. De la misma manera en que se tienen funciones acotadas superiormente, se tendrán funciones acotadas inferiormente, veamos:

(4) Sea $f:[2,4) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 10$ (figura 5) observamos que ningún valor $f(x)$ con $x \in [2,4)$ es menor que -6 es decir $-6 \leq f(x)\ \forall x \in [2,4)$, la figura 5 nos ayuda a visualizar que $\exists M = -6 \ni -6 \leq f(x)\ \ \forall x \in [2,4)$.

Figura 5



(5) Sea $g:(1,4]\to\mathbb{R}$ con $g(x)=-\dfrac{x}{2}+3$ (figura 6).

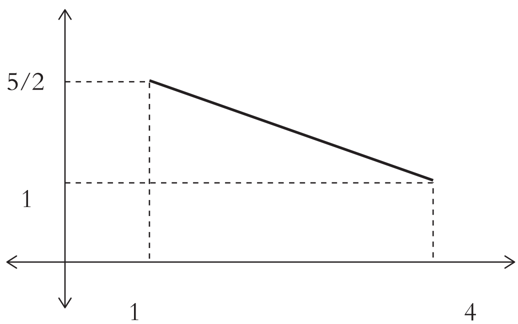
Nuevamente notamos de la gráfica de *g*, que todas las imágenes $g(x)$ con $x\in(1,4]$ no serán menores que 1, es decir, $1\leq g(x)$ siempre que $x\in(1,4]$.

En la situación (4) se tiene que $\exists M=-6 \ni -6\leq f(x) \quad \forall x\in[2,4)$ y en la situación (5) tenemos que $\exists 1\in\mathbb{R} \ni 1\leq g(x) \quad \forall x\in(1,4]$.

DEFINICIÓN 1.7.2

Diremos que *f* es una función acotada inferiormente en *A,* subconjunto de $\mathbb{R}$ si y sólo si $\exists m\in\mathbb{R} \ni m\leq f(x) \quad \forall x\in A$

Figura 6



Problema 1.7.2

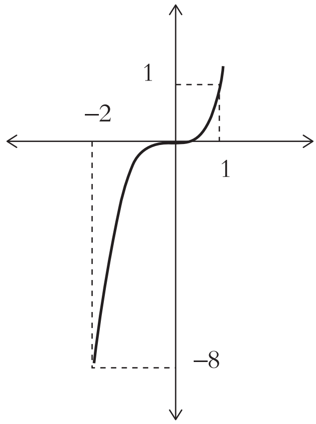
Demostrar que $f(x)=x^3$ es acotada inferiormente en [-2,1]

Solución

La figura 7 nos dice cuál es la situación geométrica del problema. ¿Qué significa que *f* sea acotada inferiormente en $[-2,1]$? Que $\exists m\in\mathbb{R} \ni m\leq f(x) \quad \forall x\in[-2,1]$ (definición 1.7.2).

De esta manera, el problema es construir o proponer un número *m* el cual cumpla $m\leq f(x) \quad \forall x\in[-2,1]$.

Figura 7



La figura 7 sugiere que se proponga a −8, siendo ahora nuestro objetivo demostrar que se cumple $-8 \leq f(x) \quad \forall x \in [-2,1]$.

Para lograr lo anterior, tomemos un elemento arbitrario $x_0 \in [-2,1]$ y deduzcamos $-8 \leq f(x_0)$.

Dado que $x_0 \in [-2,1] \Rightarrow -2 < x_0 < 1$, como *f* es creciente en $\mathbb{R}$, se tendrá que *f* es creciente en $[-2,1]$ (ejercicio 1.6.1), de esta manera se obtiene que $f(-2) \leq f(x_0) \leq f(1) \Rightarrow -8 \leq f(x_0)$ que es lo que quería demostrar, por lo tanto, como x_0 es arbitrario, concluimos que $-8 \leq f(x) \quad \forall x \in [-2,1]$. Finalmente $f(x) = x^3$ es acotada inferiormente en $[-2,1]$.

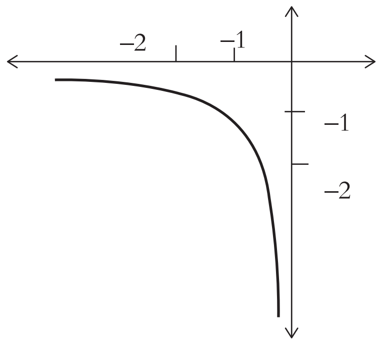
Problema 1.7.3

Sea $g(x) = \dfrac{1}{x}$ demuestre que *g* no es acotada inferiormente en $(-\infty,0)$.

Se hará la prueba por contradicción.

Lo que se quiere demostrar es que *g* no es acotada inferiormente en $(-\infty,0)$, entonces supongamos que *g* sí es acotada inferiormente en $(-\infty,0)$. ¿Qué significa que *g* sea acotada inferiormente en $(-\infty,0)$? Que $\exists m \in \mathbb{R} \ni m \leq g(x) \ \forall x \in (-\infty,0)$, es decir, $\exists m \in \mathbb{R} \ni m \leq \dfrac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty,0)$. Nosotros afirmamos que *m* sí existe y es negativa, ¿por qué? Porque *m* debe cumplir con $m \leq \dfrac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty,0)$ donde es claro que el cociente es negativo.

Figura 8



Ahora, como se supone que $m \leq \frac{1}{x} \ \forall x \in (-\infty, 0)$, en particular para $x_0 = \frac{1}{m-1}$ se tiene $m \leq \frac{1}{x_0}$ (observe que $x_0 \in (-\infty, 0)$ ya que como $m < 0 \Rightarrow \ x_0 = \frac{1}{m-1}$ es negativo).

De esta forma se tiene que $m \leq f(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\frac{1}{m-1}}$ de donde se implica que $m \leq m-1$, teniéndose que $0 \leq -1$ lo cual es absurdo; por lo tanto, es falso suponer que g sea acotada inferiormente en $(-\infty, 0)$, de esta forma se concluye que g no es acotada inferiormente.

Problema 1.7.4

Para $f(x) = 2x + 1$ demuestre que:

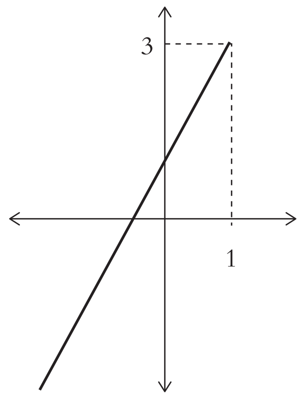
(a) No es acotada inferiormente en $(-\infty, 1]$.
(b) Es acotada superiormente en $(-\infty, 1]$.

Solución (a)

Para demostrar este inciso procederemos nuevamente por contradicción, es decir, supondremos que f es acotada inferiormente en $(-\infty, 1]$ (ver la figura 9).

¿Qué significa que f es acotada inferiormente en $(-\infty, 1]$? Que $\exists m \in \mathbb{R} \ni m \leq f(x) \ \forall x \in (-\infty, 1]$ (como el problema anterior, debemos buscar un valor x_0 el cual nos lleve a alguna situación falsa).

Figura 9



Fácilmente podemos notar que existen valores $f(x)$ negativos, por ejemplo, cuando $x=-10$ $f(x)=-19$ y como hemos supuesto que $\exists m \in \mathbb{R} \ni m \leq f(x)$ $\forall x \in (-\infty,1]$, este m debe ser negativo.

Ahora tomando a $x_0 = \dfrac{m}{2} - 3$ se observa que $x_0 \in (-\infty,1]$ luego se debe cumplir en particular $m \leq f(x_0)$ para nuestro x_0; de esta forma

$m \leq f(x_0) \Rightarrow m \leq 2\left(\dfrac{m}{2} - 3\right) + 1 \Rightarrow m \leq m - 6 + 1 \Rightarrow 0 \leq -5$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto es falso suponer que f es acotada inferiormente en $(-\infty,1]$, y concluimos que f no es acotada inferiormente en $(-\infty,1]$.

Solución (b)

¿Qué significa que f sea acotada superiormente en $(-\infty,1]$?que $\exists M \in \mathbb{R} \ni f(x) \leq M$ $\forall x \in (-\infty,1]$ (definición 1.7.1).

Entonces el problema es construir o proponer (o dar evidencia clara de su existencia) un M que cumpla con $f(x) \leq M \quad \forall x \in (-\infty,1]$. De la figura 9 proponemos a 3 como ese valor M buscado, siendo ahora nuestro objetivo probar que $f(x) \leq 3$ $\forall x \in (-\infty,1]$.

Para demostrar lo anterior, tomemos un $x_0 \in (-\infty,1]$ arbitrario y deduzcamos que se cumple $f(x_0) \leq 3$.

Para nuestro x_0 seleccionado se tiene que $x_0 \in (-\infty, 1] \Rightarrow x_0 \leq 1 \Rightarrow 2x_0 \leq 2 \Rightarrow 2x_0 + 1 \leq 3$, pero como $f(x_0) = 2x_0 + 1$ se tiene $f(x_0) \leq 3$. Como x_0 es arbitrario, se concluye que $f(x) \leq 3 \quad \forall x \in (-\infty, 1]$ lo cual nos dice que *f* es acotada superiormente en $(-\infty, 1]$.

DEFINICIÓN 1.7.3

Decimos que *f* está acotada en *A* si *f* es acotada superior e inferiormente en *A*.

EJERCICIOS

1.7.1 Grafique $f(x) = -x + 2$; ¿es *f* acotada en $(-\infty, 3]$?

1.7.2 Demuestre que $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ es acotada en $\mathbb{R}$.

1.7.3 Si *f* y *g* son funciones acotadas en *A* ¿$f + g, fg, f/g$ serán acotadas en *A*? justifique sus respuestas.

1.7.4 Demostrar que si *f* es acotada en $[a, b]$ y en $[b, c]$ entonces *f* es acotada en $[a, c]$.

1.7.5 Demuestre que si *f* es acotada en *A* y $B \subseteq A \Rightarrow f$ acotada en *B*.

1.7.6 Demuestre que *f* es acotada en $A \Leftrightarrow \exists M > 0 \ni |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$.

1.7.7 Demostrar que si *g* es acotada superiormente en *A* y $f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in A \Rightarrow f$ es acotada superiormente en *A*.

1.7.8 Demuestre que $f(x) = x^3 + 1$ es acotada superiormente en $(-\infty, 2)$.

1.7.9 Demuestre que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es acotada en $[2, 8]$.

II. Límites

En los orígenes del cálculo, los conceptos de límite, derivada e integral, así como el cálculo de algunas áreas, se llevaban a cabo mediante nociones básicas e intuitivas; el lenguaje algebraico y la geometría analítica estaban en procesos de formación, los problemas de convergencia ya existían, pero los resultados eran abordados a partir de nociones intuitivas y geométricas, como las sorprendentes ideas de Cavalieri (1598-1647) sobre diferenciales. La formalización del cálculo comienza en la segunda mitad del siglo XIX, y es impresionante la cantidad de resultados y conjeturas correctas realizadas por personajes como Arquímides (287 a. C- 212 a. C), Galileo (1564-1642), Wallis (1616-1703), Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716) o Euler (1707-1783), por mencionar a algunos científicos anteriores a Weierstrass (1815-1897), quien es considerado el padre del análisis moderno.

Resulta formativo conocer los puntos de vista de algunos matemáticos y físicos de los siglos XVII y XVIII acerca del concepto de límite de una función de una variable real y enterarse de que, a pesar de no tener una conceptualización formal, la idea intuitiva que poseían de este concepto los conducía a cálculos correctos de derivadas e integrales.

En la primera sección de este capítulo se construye la definición de límite de una función, esto es, se establece lo que significa que una función "$f(x)$" se acerque a un número "l", cuando los valores "x" se acercan a un número "a", concluyéndose de manera formal que imágenes "$f(x)$" cercanas a "l" provienen de valores "x" cercanos al valor "a", en términos de cuantificadores.

En la segunda sección se establece la existencia del límite de una función en términos de sucesiones, lo que nos dice que la función "$f(x)$" se acerca a un número "*l*", cuando los valores "*x*" se acercan a un número "*a*", es equivalente a decir que para cualquier sucesión de números que converge al punto *a* se genera una sucesión de imágenes que converge a *l*.

En la tercera sección se establecen las condiciones para efectuar el cálculo de los límites de una suma de funciones, de un producto y de un cociente de manera formal; también se demuestran otros resultados que tienen que ver con límites y desigualdades entre funciones.

Por último, se presentan y prueban resultados acerca de límites laterales de funciones, para esto se determina lo que se entenderá cuando una función tienda a un número por la izquierda o por la derecha; asimismo, se establece una relación entre la existencia de un límite y la existencia de los límites laterales.

Sección 2.1. Definición básica de límite

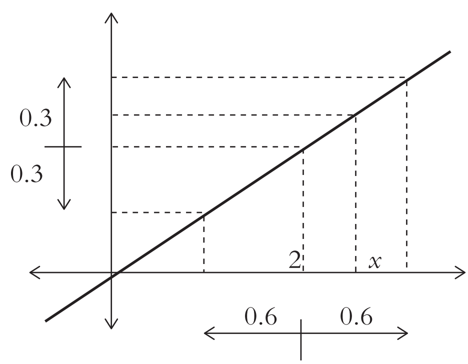
(1) En la función $f(x)=\dfrac{x}{2}$ no es difícil ver, tanto en la gráfica como en la expresión, que si x toma valores cercanos a 2, $f(x)$ estará próximo a 1. Tabulemos algunos valores (ver figura 1).

Si $x = 2.5$	$\Rightarrow$	$f(2.5) = 1.25$
Si $x = 2.3$	$\Rightarrow$	$f(2.3) = 1.15$
Si $x = 2.1$	$\Rightarrow$	$f(2.1) = 1.05$
Si $x = 2.05$	$\Rightarrow$	$f(2.05) = 1.025$
Si $x = 2.03$	$\Rightarrow$	$f(2.03) = 1.015$
Si $x = 2.01$	$\Rightarrow$	$f(2.01) = 1.005$
Si $x = 1.5$	$\Rightarrow$	$f(1.5) = 0.75$
Si $x = 1.7$	$\Rightarrow$	$f(1.7) = 0.85$
Si $x = 1.9$	$\Rightarrow$	$f(1.9) = 0.95$
Si $x = 1.95$	$\Rightarrow$	$f(1.95) = 0.975$
Si $x = 1.97$	$\Rightarrow$	$f(1.97) = 0.985$
Si $x = 1.99$	$\Rightarrow$	$f(1.99) = 0.995$

Numéricamente, observamos que si se está cerca de 2, $f(x)$ lo estará de 1.

Note, observando la figura 1, que si x es un número cerca de 2 y se encuentra en el intervalo (1.4,2.6), es decir, si $1.4 < x < 2.6$ con $x \neq 2$, entonces se tendrá $0.7 < f(x) < 1.3$.

Figura 1



Se observa que si $x \in (1.4, 2.6)$ con $x \neq 2$, entonces su distancia al número 2 es menor que 0.6, trayendo como consecuencia que al valor de $f(x)$ dista al 1 menos que 0.3.

Escribamos lo anterior en otros términos:

Si $0 < |x-2| < 0.6 \Rightarrow |f(x)-1| < 0.3$

(2) Con la misma función que en el inciso anterior, $f(x) = \frac{x}{2}$, contestemos la siguiente pregunta:

¿Qué tan cercanos deben estar los valores de x al 2, para que $f(x)$ diste al 1 menos que $1/50$? (figura 2).

Observemos que $1 + \frac{1}{50}$ proviene de un x_2 único (*f* es suprayectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$),

$f(x_2) = 1 + \frac{1}{50} = \frac{51}{50}$. Así también, $1 - \frac{1}{50}$ proviene de un x_1 único $f(x_1) = 1 - \frac{1}{50} =$

$\frac{49}{50}$.

Ahora preguntamos: ¿quiénes son, x_1, x_2?

Como $f(x_2) = \frac{x_2}{2} = \frac{51}{50} \Rightarrow x_2 = \frac{51}{25}$.

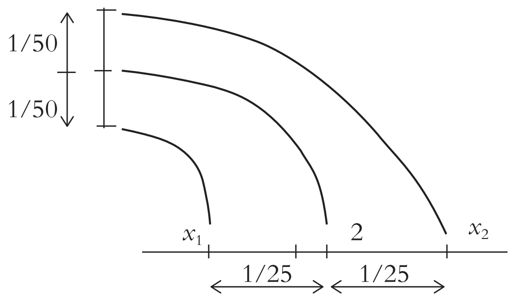
De la misma manera $f(x_1) = \frac{x_1}{2} = \frac{49}{50} \Rightarrow x_1 = \frac{49}{25}$.

¿Cuánto distan x_1, x_2 de 2?

La distancia de x_2 a 2 es: $|x_2 - 2| = \left|\frac{51}{25} - 2\right| = \frac{1}{25}$.

La distancia de x_1 a 2 es: $|x_1 - 2| = \left|\frac{49}{25} - 2\right| = \frac{1}{25}$.

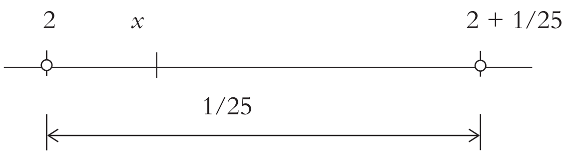
Figura 2



Los valores x_1, x_2 distan lo mismo al 2, esta distancia es de $\dfrac{1}{25}$.

Notemos que si $x \neq 2$ dista al 2 menos que $\dfrac{1}{25}$, tendremos que $f(x)$ distará al 1 menos que $\dfrac{1}{50}$ (ver figura 3).

Figura 3



Si x está entre 2 y $2+\dfrac{1}{25}=\dfrac{51}{25}$, tendremos que $0<|x-2|<\dfrac{1}{25}$, es decir, x dista al 2 menos que $\dfrac{1}{25}$.

Geométricamente, un número x con las características anteriores tendrá asociado un $f(x)$, el cual distará de 1 menos que $\dfrac{1}{50}$, verifiquemos esto más analíticamente:

Como $0<|x-2|<\dfrac{1}{25}$ con $x>2$, se tiene que $x-2>0 \Rightarrow 0<|x-2|= x-2<\dfrac{1}{25} \Rightarrow \dfrac{x-2}{2}<\dfrac{1}{50} \Rightarrow \dfrac{x}{2}-1<\dfrac{1}{50}$.

Luego, como $x > 2$, se tiene $\frac{x}{2} > 1$, por lo tanto $\frac{x}{2} - 1 > 0$, de esta forma $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = \frac{x}{2} - 1$, con esto $\left|\frac{x}{2} - 1\right| < \frac{1}{50}$, y como $f(x) = \frac{x}{2}$, se tiene finalmente que $\left|f(x) - 1\right| < \frac{1}{50}$.

Si tomásemos un x entre $2 - \frac{1}{25}$ y 2, es decir, $0 < |x - 2| < \frac{1}{25}$ con $2 - \frac{1}{25} < x < 2$, procediendo de manera similar como anteriormente, llegaríamos a tener $|f(x) - 1| < \frac{1}{50}$.

Se hace notar que para la $\varepsilon = \frac{1}{50}$ dada inicialmente, hemos encontrado un $\delta = \frac{1}{25}$ para el cual, si x es un elemento del intervalo $I_\delta = \left(2 - \frac{1}{25}, 2 + \frac{1}{25}\right)$ con $x \neq 2$, esto implica que $f(x)$ estará en el intervalo $I_\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{50}, 1 + \frac{1}{50}\right)$.

Ahora contestemos la pregunta inicial de este punto número (2):

Los x deben ser tales que $x \in I_\delta = \left(2 - \frac{1}{25}, 2 + \frac{1}{25}\right)$ con $x \neq 2$.

La distancia de los números x al 2, debe ser menor $\frac{1}{25}$ para poder tener a $f(x)$ distando al 1 menos que $\frac{1}{50}$.

(3) Ahora, si ε_0 es como en la figura 4, se tiene que $f(x)$ dista al 1 menos que ε_0 cuando x dista al 2 menos de $\delta_0 = 2\varepsilon_0$ (ver 2 anterior).

Si ε_0 es como en la figura 4, existirá también el $\delta_0 = 2\varepsilon_0$ para el cual, si x dista al 2 menos que δ_0, entonces la distancia de 1 a $f(x)$ será menor que ε_0.

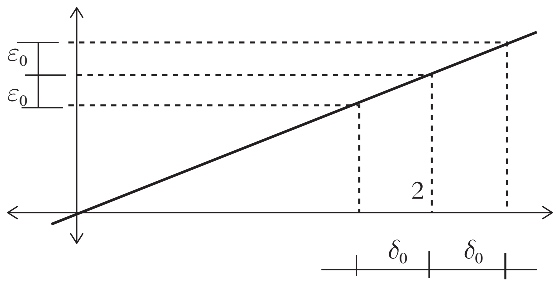
Concluimos entonces que si ε_0 es un valor cualquiera, podemos siempre encontrar otro valor $\delta_0 = 2\varepsilon_0$, el cual tiene la propiedad: si x es tal que $0 < |x - 2| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon_0$.

Para esta función $f(x)=\dfrac{x}{2}$, si ε_0 es un número muy pequeño (tal vez $\varepsilon_0 = 1/10^{10}$ y claramente puede ser más pequeño), siempre existe $\delta_0 = 2\varepsilon_0$ tal que si x cumple $0<|x-2|<\delta_0$, entonces ocurrirá $|f(x)-1|<\varepsilon_0$.

Cuando x está cerca de 2, la imagen $f(x)$ estará cerca de 1, esto se denota como $f(x)\to 1$ cuando $x\to 2$ ($\to$ se lee "tiende a") y también se escribe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$. También diremos que para cualquier valor de $\varepsilon>0$ siempre es posible encontrar un $\delta>0$, tal que si la distancia de x a 2 es menor que δ_0, entonces la distancia entre $f(x)$ y 1 es menor a ε. De una forma más compacta escribimos:

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \ni\ \forall\, x$ que cumpla $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$.

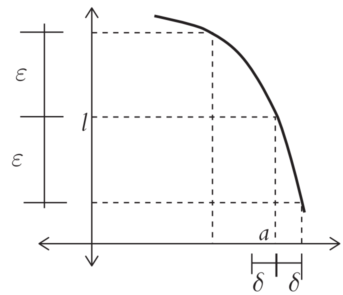
Figura 4



(4) Sea una función f como en la figura 5, en donde si x está cerca de a, $f(x)$ lo estará de l.

Note que si $\varepsilon>0$ es como en la figura 5, existirá $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.

Figura 5



DEFINICIÓN 2.1.1

Diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, cuando $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0$, tal que $\forall x$ que cumpla

$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

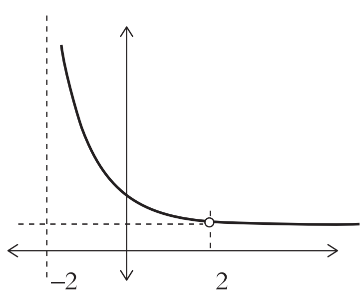
Importante:

(a) $0 < |x - a| < \delta$ significa que x está en un intervalo abierto de longitud o diámetro $2\delta > 0$, o de radio $\delta > 0$, y a está en el punto medio del intervalo, con $x \neq a$; dicho de otra forma: x está en el intervalo de radio $\delta > 0$ centrado en a, con $x \neq a$. Asimismo, $|f(x) - l| < \varepsilon$ significa que $f(x)$ está en el intervalo de radio $\varepsilon > 0$ con centro en l, donde $f(x)$ no necesariamente es distinto de l.

(b) Se pide $0 < |x - a| < \delta$, porque nos interesan las cercanías al número a, además de que el número a no necesariamente es elemento del dominio de la función.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$ (se demostrará después) y $2 \notin Df$ donde $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ (ver figura 6).

Figura 6

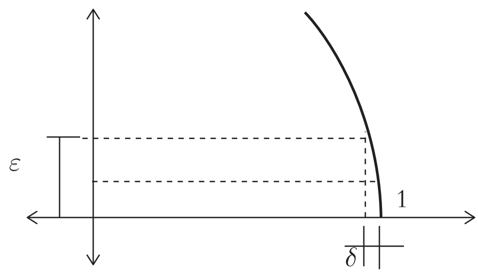


(c) Cuando en la definición aparece: $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Esto significa que $\forall x$ con $0 < |x - a| < \delta$ y $x \in Df \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Para los $x \notin Df$, simplemente no tiene sentido la desigualdad $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (figura 7) cumple $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$.

Figura 7



Tenemos por la definición 2.1.1, que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x \text{ si } 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Para los x en el intervalo de radio δ centrado en 1, que están a la izquierda de 1, se tiene que $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Para los x en el intervalo de radio δ centrado en 1, que están a la derecha de 1, la desigualdad $|f(x) - 0| < \varepsilon$ no tiene sentido, puesto que *f* no está definida para esos valores de x.

(d) La expresión $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{1 - x^2}$ carece de sentido, ya que cerca de 2 no existen valores del dominio de *f*. ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando x se aproxima a 2? $f(x)$ no es un número real cuando x está próximo a 2, por lo tanto *f* carece de comportamiento para valores de x "muy cercanos a 2" (piense por ejemplo en 1.8).

Para que tenga sentido $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, el número a debe tener siempre elementos del dominio de la función *f*, a la izquierda de a, a la derecha de a, o hacia ambos lados de a.

(e) Se entiende que existen valores del dominio de *f* a izquierda o derecha de a, si dado cualquier $h > 0$, existe $x \in Df$ tal que la distancia entre x y a es menos que h, es decir $0 < |x - a| < h$.

Problema 2.1.1

Sea $f(x) = x^2$, intuitivamente, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$, ¿Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, cómo debe ser $\delta > 0$ tal que si x cumple con $0 < |x - 2| < \delta$ entonces se cumpla $|f(x) - 4| < \varepsilon = \dfrac{1}{10}$? (figura 8).

Solución

Figura 8

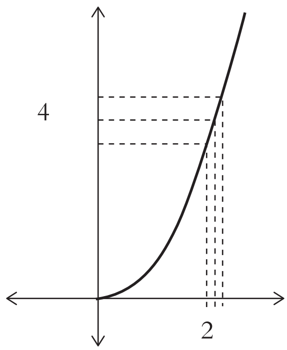
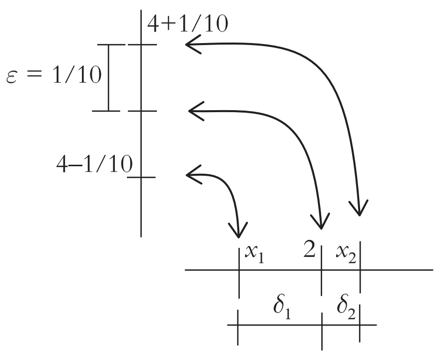


Figura 9



La función $f(x) = x^2$ es sobreyectiva de $[0, +\infty)$ en $[0, +\infty)$ y es creciente también en este intervalo; de esta manera, para el número $4 + \dfrac{1}{10}$ existe $x_2 \in [0, +\infty)$ único, tal que $f(x_2) = 4 + \dfrac{1}{10}$, así también para $4 - \dfrac{1}{10}$ existe $x_1 \in [0, +\infty)$ único, tal que se tiene $f(x_1) = 4 - \dfrac{1}{10}$.

¿Quiénes son x_1, x_2?, calculémoslos:

$$f(x_2) = x_2^2 = 4 + \frac{1}{10} = \frac{41}{10} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{41}{10}} \in [0, +\infty)$$

$$f(x_1) = x_1^2 = 4 - \frac{1}{10} = \frac{39}{10} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{39}{10}} \in [0, \infty)$$

La distancia de $x_2 = \sqrt{\frac{41}{10}}$ al 2 es $|x_2 - 2| \cong 0.024845$

La distancia de $x_1 = \sqrt{\frac{39}{10}}$ al 2 es $|x_1 - 2| \cong 0.025158$

De la figura 9, se tiene que δ_1 será $2 - \sqrt{\frac{39}{10}} \cong 0.025158$

De la figura 9, se tiene que δ_2 será $\sqrt{\frac{41}{10}} - 2 \cong 0.024845$

Si nosotros tomamos $x_0 \in (x_1, x_2)$ con $x_0 \neq 2$, como f es creciente en $[0, +\infty)$, tendremos $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$, es decir $4 - \frac{1}{10} < f(x_0) < 4 + \frac{1}{10}$.

No es difícil observar que el intervalo (x_1, x_2) no está centrado en 2.

Recuerde que debemos encontrar un $\delta > 0$ y construir el intervalo centrado en 2 con radio δ; tenemos dos posibles valores que pueden ser el δ buscado, estos son δ_1, δ_2 (figura 9).

Note que nos conviene tomar a la δ mínima, en este caso $\delta = \delta_2$ (verifique que si tomamos $\delta = \delta_1$ será falso que $\forall\, x$ si $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon = \frac{1}{10}$).

Ahora debemos verificar que si x cumple

$$0 < |x - 2| < \delta = \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon = \frac{1}{10},$$

pueden ocurrir dos cosas con x, este puede estar a la derecha o a la izquierda de 2.

(i) Si $x < 2$ con $0 < |x - 2| < \delta = \delta_2 < \sqrt{\frac{41}{10}} - 2$, se tiene que $x - 2 < 0$

$$0 < |x-2| = 2-x < \sqrt{\frac{41}{10}} - 2 \Rightarrow 2-x < \sqrt{4+\frac{1}{10}} - 2 < 2 - \sqrt{\frac{39}{10}} = \delta_1 \Rightarrow$$

$$2-x < 2-\sqrt{\frac{39}{10}} \Rightarrow \sqrt{\frac{39}{10}} < x \Rightarrow 4-\frac{1}{10} = \frac{39}{10} < x^2 \Rightarrow 4-x^2 < \frac{1}{10}$$

y como f es creciente en $[0,+\infty)$ y se tiene $x<2$, concluimos $x^2<4 \Rightarrow$ $0<4-x^2 = |x^2-4|$, de esta manera tenemos $|x^2-4| < \frac{1}{10}$, es decir $|f(x)-4| < \varepsilon = \frac{1}{10}$.

ii. Si $x>2$ con $0<|x-2|<\delta=\delta_2<\sqrt{\frac{41}{10}}-2$, se tiene

$$0 < |x-2| = x-2 < \sqrt{\frac{41}{10}} - 2 \Rightarrow x < \sqrt{\frac{41}{10}} \Rightarrow x^2 < \frac{41}{10} = 4+\frac{1}{10} \Rightarrow$$

$x^2-4<\frac{1}{10}$ nuevamente, como f es creciente en $[0,+\infty)$ y $x>2 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow$ $x^2-4>0 \Rightarrow |x^2-4| = x^2-4$, de esta manera tenemos $|x^2-4|<\frac{1}{10}$, o sea $|f(x)-4| < \varepsilon = \frac{1}{10}$.

De (i) y (ii) se tiene, efectivamente, que si x cumple con

$$0<|x-2|<\delta=\delta_2 \Rightarrow |f(x)-4|<\varepsilon=\frac{1}{10}.$$

De esta forma la δ buscada puede tomar el valor de $\delta_2 = \sqrt{\frac{41}{10}} - 2$.

Problema 2.1.2

Demostrar que $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{2} = 2$

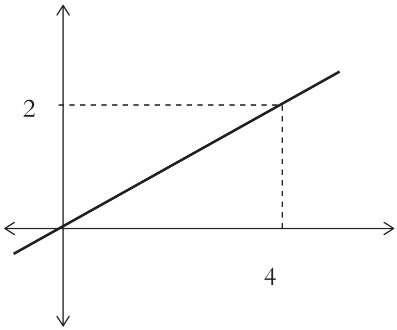
Solución

¿Qué significa que $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x}{2} = 2$?

Que $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall\, x$ si $0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$,donde $f(x) = \dfrac{x}{2}$

(definición 2.1.1) (ver figura 10).

Figura 10



El problema consiste en que dado $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario se debe construir un δ_0 para el cual se cumpla $\forall\, x$ si $0 < |x-4| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon_0$.

Estimando nuestra última desigualdad:

$|f(x) - 2| < \varepsilon_0 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{2} - 2\right| < \varepsilon_0$, luego como $\dfrac{1}{2}|x-4| = \left|\dfrac{x}{2} - 2\right| \Rightarrow \dfrac{1}{2}|x-4| < \varepsilon_0$.

Recordemos que para la δ_0 buscada se debe tener $0 < |x-4| < \delta_0 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{2} - 2\right| < \varepsilon_0$; note que hemos llegado a que $\dfrac{1}{2}|x-4| < \varepsilon_0$, de esta manera el candidato a ser δ_0 es $2\varepsilon_0$.

Verifiquemos ahora que $\forall\, x$ si $0 < |x-4| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon_0$.

¿Qué necesitamos hacer? Seleccionar un x_0 arbitrario que cumpla $0 < |x_0 - 4| < \delta_0$ y a partir de esto concluir que $|f(x_0) - 2| < \varepsilon_0$.

Como tenemos $0 < |x_0 - 4| < \delta_0 = 2\varepsilon_0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}|x_0 - 4| < \varepsilon_0 \Rightarrow \left|\dfrac{x_0}{2} - 2\right| < \varepsilon_0$, pero $f(x_0) = \dfrac{x_0}{2}$, de esta manera $|f(x_0) - 2| < \varepsilon_0$.

Como x_0 es arbitrario, se tiene entonces $\forall x$ si $0 < |x-4| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon_0$.

Así también, como la $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria y encontramos su δ_0, concluimos que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni \forall x$ si $0 < |x-4| < \delta \Rightarrow |f(x)-2| < \varepsilon$, luego entonces, queda demostrado que $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{2} = 2$.

La estrategia utilizada para resolver este problema, se repetirá en los siguientes tres problemas.

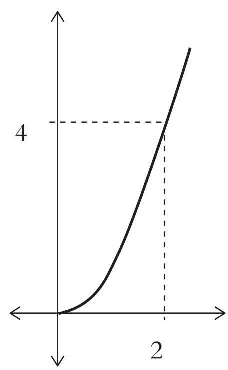
Problema 2.1.3

Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$ cuando $g(x) = x^2$ (ver figura 11).

Solución

¿Qué significa que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$? Que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |g(x)-4| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

Figura 11



Entonces el problema consiste en tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y con ello construir un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $0 < |x-2| < \delta_0 \Rightarrow |g(x)-4| < \varepsilon_0$.

Estimando $|g(x)-4| < \varepsilon_0$:

$$|g(x)-4| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < \varepsilon_0 \qquad \text{(I)}$$

Observe el problema anterior, y notará que nos gustaría tener algo como $\left|g(x)-4\right| < M\left|x-2\right|$ para poder construir a $\delta_0 = \varepsilon_0/M$; para lograr esto, acotemos al término $\left|x+2\right|$. ¿Cómo?, restringiendo la movilidad de x en un intervalo centrado en 2 de radio 1; esto es, con $x \in (1,3)$ y x distinto de 2.

Tomando a las x en el intervalo $x \in (1,3)$ con $x \neq 2$, se cumple con $0 < \left|x-2\right| < \delta_1 = 1$ y también se tiene que $\left|x+2\right|$ será menor que 5.

Entonces si x cumple $0 < \left|x-2\right| < \delta_1 = 1$, se tendrá de (I), que $\left|g(x)-4\right| < 5\left|x-2\right| < \varepsilon_0$ de donde construimos a $\delta_2 = \dfrac{\varepsilon_0}{5}$ ¿Quién es el valor de δ_0 buscado? Se propone a $\delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$; observe que siempre $\delta_0 \leq \delta_1, \delta_2$.

Demostremos ahora que $\forall\, x$ si $0 < \left|x-2\right| < \delta_0 \Rightarrow \left|g(x)-4\right| < \varepsilon_0$; para lograr esto, tomemos un x_0 arbitrario que cumpla con $0 < \left|x_0-2\right| < \delta_0$ y deduzcamos $\left|g(x_0)-4\right| < \varepsilon_0$.

(i) Como $0 < \left|x_0-2\right| < \delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que

$$0 < \left|x_0-2\right| < \delta_0 \leq 1 \text{y} 0 < \left|x_0-2\right| < \delta_0 \leq \frac{\varepsilon_0}{5} \Rightarrow \left|x_0+2\right| < 5 \text{y} 0 < \left|x_0-2\right| < \frac{\varepsilon_0}{5}.$$

De las dos últimas desigualdades se tiene $\left|x_0+2\right|\left|x_0-2\right| < 5\left(\dfrac{\varepsilon_0}{5}\right) = \varepsilon_0$.

Pero como $\left|g(x_0)-4\right| = \left|x_0+2\right|\left|x_0-2\right|$ concluimos que $\left|g(x_0)-4\right| < \varepsilon_0$.

De esta manera, como x_0 es arbitraria que cumple entonces que $\forall x$ con $0 < \left|x-2\right| < \delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, se concluye $\left|g(x)-4\right| < \varepsilon_0$.

Luego, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitrario, se cumplirá que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni \forall x$ que cumple $0 < \left|x-2\right| < \delta \Rightarrow \left|g(x)-4\right| < \varepsilon$, lo cual significa que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$.

Problema 2.1.4

Demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \dfrac{1}{4}$ donde $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

Solución: (ver figura 6).

¿Qué significa que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \dfrac{1}{4}$?

Que $\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \delta > 0 \ni 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|g(x) - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

El problema es entonces, tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y con esto construir un $\delta_0 > 0$ que cumpla con $\forall x$ si $0 < |x-2| < \delta_0 \Rightarrow \left|g(x) - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon_0$.

Estimemos la última desigualdad.

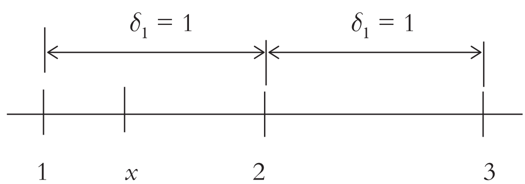
$$\left|g(x) - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{x-2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4-x-2}{4(x+2)}\right| =$$

$$\left|\frac{-x+2}{4(x+2)}\right| = \frac{1}{4}\frac{|-x+2|}{|x+2|} = \frac{1}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|} \quad \text{(I)}$$

En (I) el problema nuevamente es acotar un factor, en este caso debemos acotar $\frac{1}{|x+2|}$ restringiendo la movilidad de x (ver problema 2.1.3).

Nótese que si x es tal que $0 < |x-2| < 1 = \delta_1$ (ver figura 12).

Figura 12



se tendrá que la cantidad $|x+2|$, no pasará de 5 y será más grande que 3, es decir $3 < |x+2| < 5$, de donde se tiene $\frac{1}{|x+2|} < \frac{1}{3}$. Con este resultado, regresando a (I) tendremos:

$$\left|g(x) - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}\frac{|x-2|}{|x+2|} < \frac{1}{4}\frac{|x-2|}{3} \quad \text{(II)}$$

Como se está estimando a $\left|g(x) - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon_0$ de (II), escribiremos $\left|g(x) - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}\frac{|x-2|}{3} < \varepsilon_0$.

De donde $|x-2|<12\varepsilon_0$ y escribimos $\delta_2=12\varepsilon_0$. Entonces la δ_0 que puede funcionar es $\delta_0=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}=\text{mín}\{1,12\varepsilon_0\}$.

Verifiquemos efectivamente que $\delta_0=\text{mín}\{1,12\varepsilon_0\}$ cumple que

$$\forall x \text{ si } 0<|x-2|<\delta_0 \Rightarrow \left|g(x)-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon_0.$$

Para esto tomemos un x_0 arbitrario que cumpla con $0<|x_0-2|<\delta_0$ y concluyamos $\left|g(x_0)-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon_0$.

Como $0<|x_0-2|<\delta_0=\text{mín}\{1,12\varepsilon_0\}$, se tiene que $0<|x_0-2|<1$ y $0<|x_0-2|<12\varepsilon_0$, de la primera desigualdad se tiene $3<|x_0+2|<5$ y de la segunda $\frac{|x_0-2|}{12}<\varepsilon_0$, por lo tanto $\frac{1}{|x_0+2|}<\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}\frac{|x_0-2|}{3}<\varepsilon_0$.

De estas dos últimas desigualdades se tiene:

$\frac{1}{4}\frac{|x_0-2|}{|x_0+2|}<\varepsilon_0$, pero como $\left|g(x_0)-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}\frac{|x_0-2|}{|x_0+2|}$ (por (II)), se concluye $\left|g(x_0)-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon_0$.

Como x_0 es arbitrario, concluimos que $\forall x$ si $0<|x-2|<\delta_0 \Rightarrow \left|g(x)-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon_0$.

Ahora, como la ε_0 tomada inicialmente también es arbitraria, se tiene que $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 \ni \forall x$ si $0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|g(x)-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$, de donde se concluye que $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\frac{1}{4}$.

Nota

En muchos textos, este tipo de demostraciones termina al momento de hallar la δ asociada al ε tomado inicialmente (arbitrario), ya que cuando se estima a la desigualdad $|f(x)-l|<\varepsilon$, lo que se está construyendo es un camino que nos lleve de $0<|x-a|<\delta$ hasta $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Problema 2.1.5

Demuestre que $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$ donde $f(x) = x^3$.

Solución

¿Qué significa que $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$?

Que $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni \forall x$ que cumpla $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-8| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

Así, el problema consiste en tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y construir un $\delta_0 > 0$ tal que cumpla $\forall x$ si $0 < |x-2| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-8| < \varepsilon_0$.

Estimemos $|f(x)-8| < \varepsilon_0$:

$$|f(x)-8| = |x^3-8| = |(x-2)(x^2+2x+4)| = |x-2||x^2+2x+4| \quad \text{(I)}$$

Si estas x son tales que $0 < |x-2| < 1$ (figura 12), se tendrá que $|x^2+2x+4|$ no será mayor que 19; regresando a (I) se tiene $|f(x)-8| = |x-2||x^2+2x+4| < 19|x-2|$.

Como se está suponiendo a $|f(x)-8| < \varepsilon_0$ para poder construir un δ_0, se tendrá que si $19|x-2| < \varepsilon_0$, entonces $|x-2| < \dfrac{\varepsilon_0}{19} = \delta_2$ y con esto proponemos a $\delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon_0}{19}\right\}$.

Así, tenemos que para $\varepsilon_0 > 0$ arbitraria, existe

$\delta_0 > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x-2| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-8| < \varepsilon_0$, entonces

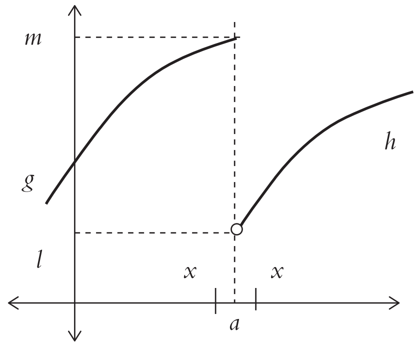
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-8| < \varepsilon$, por lo tanto $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$.

Nota

Se le deja al lector verificar que $\forall x$ si $0 < |x-2| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-8| < \varepsilon_0$, donde $\delta_0 = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\varepsilon_0}{19}\right\}$.

A continuación, se demostrará un resultado básico sobre los límites de funciones.

Figura 13



(5) Para la función $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \leq a \\ h(x) & \text{si} \quad x > a \end{cases}$ (figura 13), si x toma valores próximos a a, con $x > a$ tendremos que los valores $f(x)$ estarán cerca de l. Acercándose sistemáticamente al número a por medio de la sucesión $\{x_n\} = \left\{a + \frac{1}{n}\right\}$ con $n \in \mathbb{N}$, no es difícil observar que la sucesión de imágenes que se genera $\{f(x_n)\}$, se va aproximando al valor de l.

Algo parecido ocurre si se toman valores de x, a la izquierda de a ($x < a$); acercándose al número a por la izquierda, los valores $f(x)$ se aproximan a m.

¿Hacia dónde se acerca $f(x)$ cuando x toma valores cercanos al número a? Se puede observar que las imágenes no van a ningún lugar en especial. Se puede pensar que f se acerca a "dos valores", pero si se analiza esta función por medio de la definición 2.1.1, se obtendrá que ni l ni m son límites de la función f cuando x se acerca al número a.

Teorema 2.1.1

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Rightarrow l$ es único.

Demostración

Supongamos que existe l' con y $\lim_{x\to a} f(x) = l'$.

De la hipótesis se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, lo cual significa que $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ni$ $\forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

Como se ha supuesto que $\lim_{x\to a} f(x) = l'$, se tendrá también que $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ $\delta > 0\ \ni\ \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - l'| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

Para $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario, como $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} f(x) = l'$, se tendrá que existen δ_1, δ_2, tales que:

(I) $\forall x$ si $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$

(II) $\forall x$ si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon_0$

Ahora tomemos un x_0 que cumpla con $0 < |x_0 - a| < \delta_1$ y con $0 < |x_0 - a| < \delta_2$. Por (I) y (II) se tiene, respectivamente, que $|f(x_0) - l| < \varepsilon_0$ y $|f(x_0) - l'| < \varepsilon_0$.

Sumando las dos últimas desigualdades y recordando que $|f(x_0) - l| = |l - f(x_0)|$ se obtendrá:

$$2\varepsilon_0 > |f(x_0) - l| + |f(x_0) - l'| = |l - f(x_0)| + |f(x_0) - l'| \geq$$

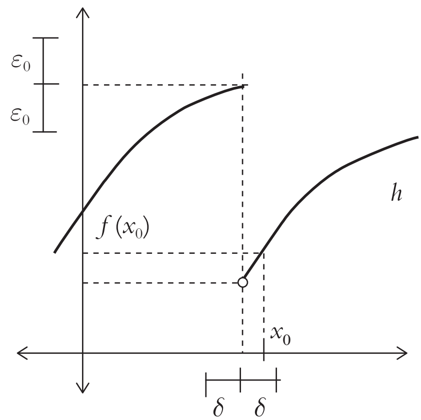
$$|l - f(x_0) + f(x_0) - l'| = |l - l'|.$$

Esto significa que $|l - l'| < 2\varepsilon_0$ para un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario lo cual significa que $l = l'$, es decir que el límite es único.

Otra forma de ver la prueba del teorema anterior es suponer que $l \neq l'$, de esta forma se tendría que $|l - l'| > 0$, entonces para el valor de $\varepsilon_0 = \dfrac{|l - l'|}{4}$ se llegaría a tener que $1 < \dfrac{1}{2}$, lo cual es una contradicción; se deja al lector verificar esto.

Para la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \le a \\ h(x) & \text{si} \quad x > a \end{cases}$ (figura 14), notamos que si se dibuja un intervalo cualquiera centrado en a, de radio δ, existe x_0 que cumple $0<|x_0-a|<\delta$ pero $|f(x_0)-m|\ge\varepsilon_0$.

Figura 14



De este análisis geométrico obtenemos que

$$\exists\, \varepsilon_0>0 \ni \forall \delta>0\ \exists\, x_0 \ni 0<|x_0-a|<\delta \Rightarrow |f(x_0)-m|\ge\varepsilon_0 ,$$

esto nos dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq m$; observando la figura 13 preguntamos, ¿para cualquier valor m se cumple lo anterior? La respuesta es sí; también se nota que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe, así tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1.2

Diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe si $\forall r\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$\exists \varepsilon>0 \ \ni \ \forall\delta>0\ \exists x \ \ni \ 0<|x-a|<\delta \ \text{ y } |f(x)-r|\ge\varepsilon .$$

Problema 2.1.6

Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe cuando $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Solución

¿Qué significa que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe?

Que $\forall r \in \mathbb{R}\ \exists\ \varepsilon > 0\ \ni \forall \delta > 0\ \exists x\ \ni 0 < |x-0| < \delta$ pero $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$.

El problema consiste en que dado un r_0 arbitrario, se debe construir o proponer un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ exista x que diste menos a 0 que δ y que cumpla $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$.

Dividamos el problema en tres casos dependiendo de la naturaleza de r_0:

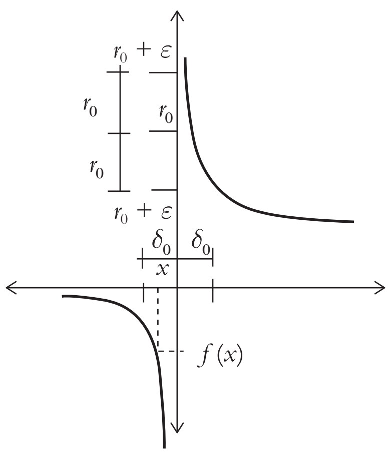
(i) $r_0 > 0$; (ii) $r_0 < 0$; (iii) $r_0 = 0$ (ver figuras 17, 18, 19).

(i) Proponemos a $\varepsilon_0 = \frac{r_0}{2}$ para nuestra demostración. Probaremos que $\forall \delta > 0\ \exists x$ con $0 < |x-0| < \delta$ pero $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$.

Observe que todos los números que están en el intervalo $(r_0 - \varepsilon_0, r_0 + \varepsilon_0)$ son positivos.

Tomemos a $\delta_0 > 0$ arbitraria, y busquemos un x que cumpla con $0 < |x-0| < \delta_0$ y $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$ (ver figura 15).

Figura 15



¿Si $x = -\frac{\delta_0}{2}$, este es un número que cumple con $0 < |x-0| < \delta_0$ y $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$? La respuesta es sí.

Veamos que se cumple la primera desigualdad $0 < |x - 0| = \left|-\frac{\delta_0}{2} - 0\right| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0$.

Y también la segunda $|f(x) - r_0| = \left|f\left(-\frac{\delta_0}{2}\right) - r_0\right| = \left|-\frac{2}{\delta_0} - r_0\right| = \frac{2}{\delta_0} + r_0 \geq \frac{r_0}{2} = \varepsilon_0$.

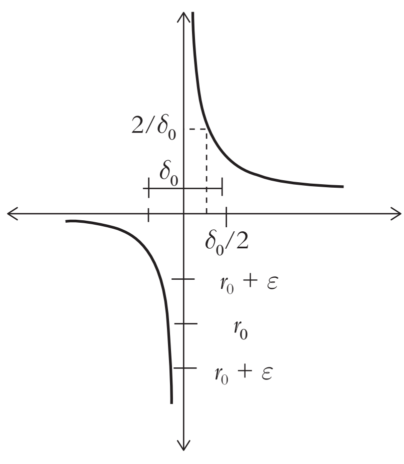
Por lo tanto, como δ_0 es arbitrario, se tiene que $\forall \delta > 0 \quad \exists x \ni \quad 0 < |x - 0| < \delta$ y $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$.

Por lo tanto $\forall r > 0 \quad \exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \ni \forall \delta > 0 \quad \exists x$, el cual cumple con $0 < |x - 0| < \delta$ y $|f(x) - r| \geq \varepsilon_0$.

(ii) Si tomamos a $r_0 < 0$, proponemos a $\varepsilon_0 = -\frac{r_0}{2}$ y demostraremos que este es el número buscado, es decir, verifiquemos que $\forall \delta > 0 \quad \exists x \ni \quad 0 < |x - 0| < \delta$ y $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$.

Observe que todos los números que están en el intervalo $(r_0 - \varepsilon_0, r_0 + \varepsilon_0)$ son negativos. Tomemos entonces un $\delta_0 > 0$ arbitrario y encontremos el x tal que $0 < |x - 0| < \delta_0$ y $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$ (figura 16).

Figura 16



¿Si $x = \frac{\delta_0}{2}$, este es un número que cumple con $0 < |x - 0| < \delta_0$ y $|f(x) - r_0| \geq \varepsilon_0$? Veamos.

$0<\left|x-0\right|=\left|\frac{\delta_0}{2}-0\right|=\frac{\delta_0}{2}<\delta_0$ y $\left|f(x)-r_0\right|=\left|f\left(\frac{\delta_0}{2}\right)-r_0\right|=\left|\frac{2}{\delta_0}-r_0\right|=$

$\frac{2}{\delta_0}-r_0\geq-\frac{r_0}{2}=\varepsilon_0.$

Luego entonces, la $x=\frac{\delta_0}{2}$ efectivamente cumple con $0<\left|x-0\right|<\delta_0$ y $\left|f(x)-r_0\right|\geq\varepsilon_0.$

Por lo tanto, como δ_0 es arbitraria concluimos que

$\forall\delta>0\quad\exists x\ \ni\ 0<\left|x-0\right|<\delta$ y $\left|f(x)-r_0\right|\geq\varepsilon_0.$

De donde se tiene que

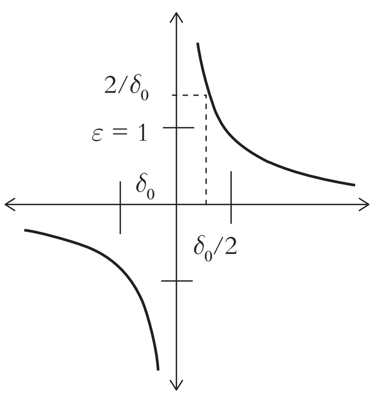
$\forall r<0\ \exists\varepsilon>0\ \ni\ \forall\delta>0\quad\exists x$ tal que $0<\left|x-0\right|<\delta$ y $\left|f(x)-r\right|\geq\varepsilon_0.$

(iii) Si $r_0=0$ (figura 17) proponemos a $\varepsilon_0=1.$

Entonces debemos probar que $\forall\delta>0\quad\exists x\ \ni\ 0<\left|x-0\right|<\delta$ y $\left|f(x)-r_0\right|\geq\varepsilon_0.$

Tomando a $\delta_0>0$ arbitrario, veamos que existe un x tal que $0<\left|x-0\right|<\delta_0$ y $\left|f(x)-r_0\right|\geq\varepsilon_0.$

Figura 17



(a) Si la $\delta_0 \geq 1$, se tiene que existe $x = \frac{1}{2}$, la cual cumple con $0 < |x - 0| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} < \delta_0$ y $|f(x) - 0| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - 0\right| = |2 - 0| = 2 \geq 1 = \varepsilon_0$.

(b) Ahora, si $\delta_0 < 1$ (figura 18) se tendrá que existe $x = \delta_0/2$, para la cual se cumple $|x - 0| = \left|\frac{\delta_0}{2} - 0\right| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0$ y $|f(x) - 0| = \left|f\left(\frac{\delta_0}{2}\right) - 0\right| = \left|\frac{2}{\delta_0} - 0\right| = \frac{2}{\delta_0} > \frac{2}{1} = 2 > 1 = \varepsilon_0$.

Esto nos dice que para $\delta_0 > 0$ siempre encontraremos un x, el cual cumpla con $0 < |x - 0| < \delta_0$ y $|f(x) - 0| \geq \varepsilon_0$.

Como δ_0 es arbitraria, se tendrá que $\forall \delta > 0 \ \exists x \ \ni 0 < |x - 0| < \delta$ y $|f(x) - 0| \geq \varepsilon$.

Por lo tanto, la $\varepsilon_0 = 1$ es el valor buscado que nos dice $\exists \ \varepsilon > 0 \ \ni \forall \delta > 0 \ \exists x \ \ni 0 < |x - 0| < \delta$ y $|f(x) - 0| \geq \varepsilon$.

Resumiendo (i), (ii) y (iii), se tendrá que

$\forall r \in \mathbb{R} \ \exists \ \varepsilon > 0 \ \ni \forall \delta > 0 \ \exists x \ \ni 0 < |x - 0| < \delta$ y $|f(x) - 0| \geq \varepsilon$.

Lo anterior nos dice, finalmente, que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

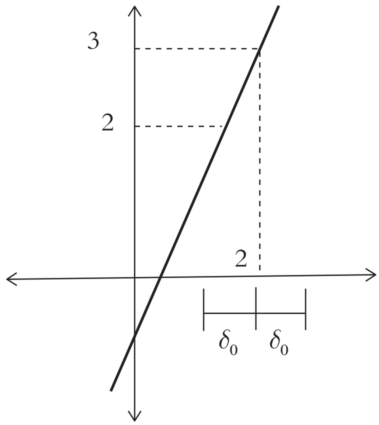
Problema 2.1.7

Demostrar que $\lim_{x \to 2} g(x) \neq 2$ cuando $g(x) = 2x - 1$.

Solución

Intuitivamente se tiene que $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$; el problema nos pide que se demuestre formalmente que $\lim_{x \to 2} g(x) \neq 2$ (figura 18).

Figura 18



¿Qué significa que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) \neq 2$?

Significa que $\exists \varepsilon > 0 \;\ni\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \;\ni\; 0 < |x-2| < \delta$ y $|g(x)-2| \geq \varepsilon$.

El problema entonces es demostrar la existencia de ese $\varepsilon > 0$.

La figura 19 nos da la idea de proponer a $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

Demostremos que $\forall \delta > 0 \;\; \exists x \;\ni\; 0 < |x-2| < \delta$ y $|g(x)-2| \geq \varepsilon$. Para esto tomemos a $\delta_0 > 0$ arbitrario y busquemos un valor x, el cual cumpla con $0 < |x-2| < \delta$ y $|g(x)-2| \geq \varepsilon$.

Proponemos a $x = 2 + \dfrac{\delta_0}{2}$, que al evaluarse en g, nos da $g\left(2 + \dfrac{\delta_0}{2}\right) = 2\left(2 + \dfrac{\delta_0}{2}\right) - 1 = 3 + \delta_0$, que es un número ubicado fuera del intervalo con extremos $(2 - 1/2,\, 2 + 1/2)$. Note que $0 < |x-2| = \left|2 + \dfrac{\delta_0}{2} - 2\right| = \dfrac{\delta_0}{2} < \delta_0$ y también $|g(x)-2| = \left|g\left(2 + \dfrac{\delta_0}{2}\right) - 2\right| = \left|2\left(2 + \dfrac{\delta_0}{2}\right) - 1 - 2\right| = |4 + \delta_0 - 3| = 1 + \delta_0 \geq \dfrac{1}{2} = \varepsilon$.

Esto nos dice que para nuestra $\delta_0 > 0$ arbitraria, existe un $x = 2 + \dfrac{\delta_0}{2}$, para el cual se cumple $0 < |x-2| < \delta_0$ y $|g(x)-2| \geq \dfrac{1}{2} = \varepsilon$.

Luego, como δ_0 es arbitrario, tenemos que

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists x \ \ni \ 0 < |x-2| < \delta \text{ y } |g(x)-2| \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} g(x) \neq 2.$

EJERCICIOS

2.1.1 Sea $f(x) = x^3$, para los siguientes valores de ε encontrar los respectivos valores de δ, tales que $\forall x$ con $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-27| < \varepsilon$.

(a) $\dfrac{1}{10}$; (b) $\dfrac{1}{3}$; (c) $\dfrac{\pi}{20}$.

2.1.2 Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^3$ donde $f(x) = x^3$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$ cuando $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

2.1.4 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ cuando $h(x) = x \operatorname{sen} x$ (sugerencia: recuerde que $|\operatorname{sen} x| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

2.1.5 Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

(a) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq 2$.

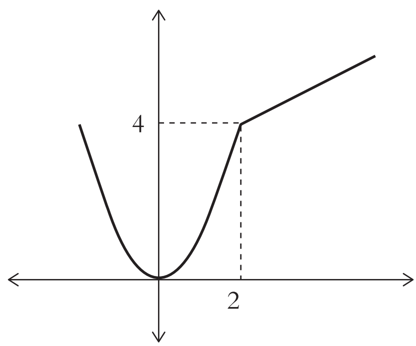
(b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Sección 2.2. Límites y sucesiones

En esta sección se demostrará uno de los teoremas más poderosos de la teoría de límites, en donde las sucesiones constituyen un elemento que ayuda a encontrar resultados de una manera más rápida.

(1) Veamos la función $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ cuya gráfica se muestra en la figura 1.

Figura 1



Observe que $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$; y note también que la sucesión $\{x_n\} = \left\{2 + \frac{1}{n}\right\}$ converge al número 2, es decir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + 1/n\right) = 2$.

Si evaluamos a la función en cada elemento de la sucesión tendremos:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_{50}, \ldots, x_n, \ldots\} = \left\{3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \ldots \frac{101}{50}, \ldots, 2 + \frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

$$\{g(x_n)\} = \{g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4) \ldots, g(x_{50}), \ldots, g(x_n) \ldots\} =$$

$$\left\{\frac{9}{12}, \frac{17}{4}, \frac{25}{6}, \frac{33}{8}, \ldots \frac{401}{100}, \ldots, 4 + \frac{1}{2n}, \ldots\right\}.$$

Hemos encontrado una sucesión $\left\{g\left(x_n\right)\right\}$, en la cual observamos que si n crece, entonces $g(x_n)$ se aproxima al número 4. Podemos decir que la sucesión $\left\{g\left(x_n\right)\right\}$ converge a 4.

No es difícil ver que si nos aproximamos de manera discreta, por medio de una sucesión que converge a 2, se genera una sucesión de imágenes, la cual se aproxima a 4. No perdamos de vista que nuestra función cumple $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$.

Emitimos a continuación dos proposiciones:

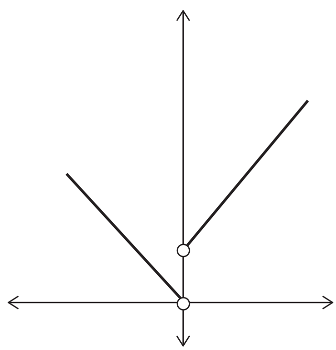
Primera: existen sucesiones que convergen a 2 y la sucesión de imágenes converge a 4.

Segunda: afirmamos, de manera intuitiva, que dado que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$, entonces cualquier sucesión que converge a 2 genera una sucesión de imágenes que converge a 4.

Ahora preguntamos: ¿si tomamos una sucesión cualquiera $\{x_n\}$ que converja al número 2, de tal manera que la sucesión de imágenes $\left\{g\left(x_n\right)\right\}$ se acerque al número 4, esto nos dirá que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$?

(2) Ahora sea $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ (figura 2).

Figura 2



Para esta función se tiene que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe y notamos también que podemos encontrar una sucesión que converja a cero, pero cuya sucesión de imágenes no converja a ningún número.

Sea $\{x_n\} = \{(-1)^n / n\}$ esta sucesión converge a cero, $\{x_n\} = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right\}$ (en caso de ser n un número impar).

La sucesión de imágenes $\{f(x_n)\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n+2}{n+1}, \ldots\right\}$. Notamos que los términos de n impar muestran cierto comportamiento $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ lo cual conforma una sucesión que tiende al número cero. Los términos pares constituyen una sucesión de números $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \ldots, \frac{n+2}{n+1}$, que converge al 1 (numerador impar, denominador par).

En términos generales, la sucesión $\{f(x_n)\}$ se dirige a dos números diferentes cuando n tiende a infinito, estos son 0 y 1. Por lo tanto la sucesión de imágenes no converge.

Enunciemos el teorema central de esta sección.

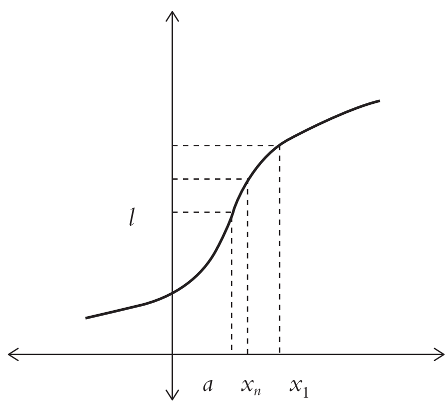
Teorema 2.2.1

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \text{ con } x_n \neq a \;\; \forall n \text{ con } \lim_{x \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x_n) = l$$

Demostración

(Demostremos primero en el sentido $\Rightarrow$)(figura 3).

Figura 3



¿Qué significa que $\forall\{x_n\}$ con $x_n \neq a \;\; \forall n$ se cumpla $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = l$? Que dada una sucesión $\{x_n\}$ arbitraria que cumpla con $x_n \neq a \;\; \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se debe cumplir que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

De esta forma tomemos una sucesión arbitraria $\{x_n\}$ con $x_n \neq a \;\; \forall n$ que satisfaga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y a partir de esto concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

¿Qué significa $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$?

Que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; N \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \geq N \Rightarrow \left| f(x_n) - l \right| < \varepsilon$.

El problema consiste entonces en que dada una $\varepsilon_0 > 0$ arbitraria se debe encontrar o construir una $N \in \mathbb{R}$, para la cual se tenga que $\forall n \geq N \Rightarrow \left| f(x_n) - l \right| < \varepsilon_0$.

Sea un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario, veamos qué nos dice nuestra hipótesis acerca de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ significa que

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\; \ni \;\; \forall x$ si $0 < \left| x - a \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$.

En particular para nuestra ε_0, se tiene que existe un

$\delta_1 > 0 \;\; \ni \;\; \forall x$ si $0 < \left| x - a \right| < \delta_1 ...(I) \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon_0 ...(II)$.

Así también, para nuestra sucesión $\{x_n\}$ tomada inicialmente, se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{R} \;\; \ni \;\; \forall n \geq N \Rightarrow 0 < \left| x_n - a \right| < \varepsilon$.

En particular para nuestra $\delta_1 > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \geq N_1 \Rightarrow \left| x_n - a \right| < \delta_1$.

Observemos que los x_n con $n \geq N_1$ cumplen con la desigualdad (I) y esto implica que $\left| f(x_n) - l \right| < \varepsilon_0$.

Como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitrario, se concluye que

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{R} \;\; \ni \;\; \forall n \geq N \Rightarrow \left| f(x_n) - l \right| < \varepsilon$, de esta manera se tendrá que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Ahora, como $\{x_n\}$ es arbitraria se concluye que

$$\forall\{x_n\} \text{ con } x_n \neq a \ \ \forall n \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

De esta manera se concluye la demostración en el sentido $\Rightarrow$.

Ahora demostremos en el sentido $\Leftarrow$. Hagámoslo por contradicción negando que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) \neq l$ ¿Qué significa esto?

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ significa que $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \ni \ \ \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (definición 2.1.1), de esta manera, $\lim_{x\to a} f(x) \neq l$ significa que $\exists \varepsilon > 0 \ \ \ni \ \ \forall \delta > 0 \ \ \exists x$ con $0 < |x-a| < \delta$ y $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Entonces estamos suponiendo que existe un número $\varepsilon > 0$, el cual cumple que si tomamos una δ arbitraria, se tendrá que existe un valor de x asociado a δ, de tal manera que se cumplan $0 < |x-a| < \delta$ y $|f(x) - l| \geq \varepsilon$. Observe lo siguiente:

Si $\delta_1 = 1$ entonces $\exists x_1 \ni \ 0 < |x_1 - a| < \delta_1 = 1$ y $|f(x_1) - l| \geq \varepsilon$

Si $\delta_2 = \dfrac{1}{2}$ entonces $\exists x_2 \ni \ 0 < |x_2 - a| < \delta_2 = \dfrac{1}{2}$ y $|f(x_2) - l| \geq \varepsilon$

Si $\delta_3 = \dfrac{1}{3}$ entonces $\exists x_3 \ni \ 0 < |x_3 - a| < \delta_3 = \dfrac{1}{3}$ y $|f(x_3) - l| \geq \varepsilon$

Si $\delta_4 = \dfrac{1}{4}$ entonces $\exists x_4 \ni \ 0 < |x_4 - a| < \delta_4 = \dfrac{1}{4}$ y $|f(x_4) - l| \geq \varepsilon$

Si $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ entonces $\exists x_n \ni \ 0 < |x_n - a| < \delta_n = \dfrac{1}{n}$ y $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$

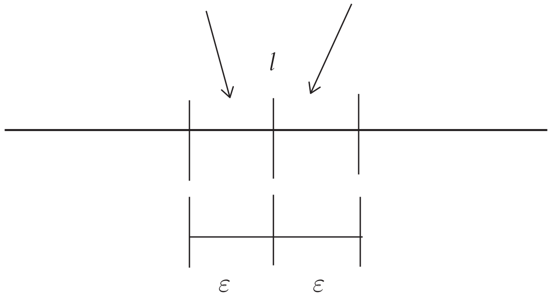
(3) Notemos que para cada δ_n existe un x_n el cual si n es muy grande se tendrá que x_n estará muy cerca de a, con esto podemos afirmar que se ha construido una sucesión que converge al punto a, con todos los x_n distintos de a, es decir $x_n \neq a \ \ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

(4) La sucesión $\{x_n\}$ generada anteriormente, cumple con la condición $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, pero ¿qué ocurre con la convergencia de la sucesión $\{f(x_n)\}$?

Siempre se tiene que la distancia entre los $f\left(x_n\right)$ construidos y l es mayor o igual a $\varepsilon > 0$, esto significa que (figura 4) no existe ningún $f(x_n)$ en el intervalo $\left(l-\varepsilon,\, l+\varepsilon\right)$, es decir, la sucesión $\{f(x_n)\}$ no se aproxima a l; concluimos entonces que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$.

Figura 4

En este intervalo no existe ningún $f(x_n)$



(3) y (4) nos dicen que $\{x_n\}$ es una sucesión que cumple con $x_n \neq a \;\; \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$, lo que contradice nuestra hipótesis, la cual nos dice que $\forall\{x_n\}$ con $x_n \neq a \;\; \forall n$ si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

De esta manera, es falso suponer que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$, por lo tanto, es verdadero que $\lim\limits_{n\to a} f(x) = l$, quedando así concluida la demostración.

Problema 2.2.1

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 5} h(x) \neq 2$, donde $h(x) = \dfrac{x^2+2}{x+3}$

Solución

¿Qué significa que $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2+2}{x+3} \neq 2$?

Utilizando el teorema 2.2.1 significa que

$\exists\{x_n\}$ con $x_n \neq 5 \;\; \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$ donde $\lim\limits_{n\to\infty} h\left(x_n\right) \neq 2$.

De esta forma el problema es construir o proponer una sucesión $\{x_n\}$ con las anteriores características; proponemos la sucesión $\{x_n\} = \left\{5 + \frac{1}{n}\right\}$.

Primero $5 + \left(\frac{1}{n}\right) \neq 5 \quad \forall n$, luego tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + 1/n\right) = 5$ y finalmente

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + 2}{x_n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5 + 1/n)^2 + 2}{5 + 1/n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{25 + 10/n + (1/n)^2 + 2}{8 + (1/n)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27 + 10/n + (1/n)^2}{8 + (1/n)} = \frac{27}{8} \neq 2,$$

lo anterior nos dice que nuestra sucesión propuesta $\{x_n\} = \left\{5 + \left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ converge a 5, pero la sucesión de imágenes no converge a 2, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2 + 2}{x + 3} \neq 2$.

Problema 2.2.2

Demostrar que $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ no existe donde $g(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4}$.

Solución

¿Qué significa demostrar que $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ no existe?

Que $\forall l \in \mathbb{R} \;\; \exists \{x_n\}$ con $x_n \neq -2 \;\; \forall n \; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -2$ donde $\lim\limits_{n\to -\infty} g(x_n) \neq l$.

Sea $l_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y demostremos que existe $\{x_n\}$ con las propiedades anteriores.

Proponemos a $\{x_n\} = \left\{-2 + \frac{1}{n}\right\}$, notemos que

$x_n \neq -2 \;\; \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-2 + 1/n\right) = -2$.

Ahora sólo falta ver que se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) \neq l_0$.

Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - 2}{x_n^2 - 4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - 2}{(x_n - 2)(x_n + 2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n + 2} =$
$\lim\limits_{n\to -\infty} \frac{1}{-2 + 1/n + 2} = \lim\limits_{n\to -\infty} \frac{1}{1/n} = \lim\limits_{n\to -\infty} n = \infty$ esto nos dice que $\lim\limits_{n\to -\infty} g(x_n) \neq l_0$.

De esta manera la sucesión buscada es $\{x_n\} = \left\{-2 + \frac{1}{n}\right\}$, cumpliéndose con esto que $\exists\{x_n\}$ con $x_n \neq -2 \ \ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$ con $\lim_{n\to\infty} g(x_n) \neq l_0$.

Por lo tanto, como l_0 es arbitrario se tiene que

$\forall l \in \mathbb{R} \ \ \exists\{x_n\}$ con $x_n \neq 2 \ \ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$ pero $\lim_{n\to\infty} g(x_n) \neq l$, de esta forma se concluye que $\lim_{n\to\infty} g(x)$ no existe.

Problema 2.2.3

Sea $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ demostrar que $\lim_{n\to 1} f(x)$ no existe.

Solución

¿Qué significa demostrar que $\lim_{n\to 1} f(x)$ no existe? Que

$\forall l \in \mathbb{R} \ \ \exists\{x_n\}$ con $x_n \neq 1 \ \ \forall n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$.

Tomemos un $l_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario y demostremos que existe $\{x_n\}$ con las propiedades anteriores. Ahora nuestro objetivo es construir o proponer a la sucesión $\{x_n\}$.

Se observa que la sucesión $\{y_n\} = \{1 + 1/n\}$ converge a 1 con $1 < 1 + 1/n \ \ \forall n$ y la sucesión $\{z_n\} = \{1 - 1/n\}$ converge también a 1 con $1 > 1 - 1/n \ \ \forall n$

Construimos entonces $\{x_n\}$ como

$$\{x_n\} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, \ldots, y_n, z_n, \ldots.\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots\}$$

¿Qué ocurre con la convergencia de $\{f(x_n)\}$?

$$\{f(x_n)\} = \left\{f(2), f(0), f(3/2), f(1/2), f(4/3), f(2/3) \ldots \right.$$
$$\left. f\left(1 + \frac{1}{n}\right), f\left(1 - \frac{1}{n}\right), \ldots\right\}$$

$$\{f(x_n)\} = \left\{2, 1, 3/2, 3/2, 4/3, 5/3, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}, \ldots\right\}$$

Se puede ver que si $n \to \infty$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ se dirige por medio de unos términos a 1, y por medio de otros términos a 2; de esta manera, $\lim_{n\to 1} f(x_n) \neq l_0$. Por lo tanto $\{x_n\}$ es la sucesión buscada.

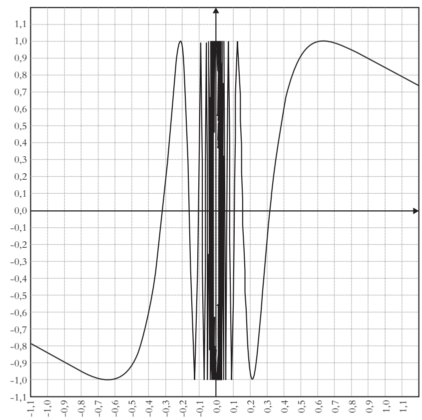
Finalmente, como $l_0 \in \mathbb{R}$ es arbitrario, se tiene que $\forall l \in \mathbb{R} \;\; \exists \{x_n\}$ con $x_n \neq 1 \;\; \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$ por lo tanto $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

Problema 2.2.4

Demostrar que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe (figura 5).

Solución

Figura 5



¿Qué significa demostrar que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe? Que $\forall l \in \mathbb{R} \;\; \exists \{x_n\}$ con $x_n \neq 0 \;\; \forall n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$. De esta manera, tomemos un $l_0 > 0$ arbitrario y demostremos que $\exists \{x_n\}$ con $x_n \neq 0 \;\; \forall n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ pero $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq l_0$.

¿Cómo encontrar tal sucesión $\{x_n\}$? Recordemos que $\operatorname{sen} x = 0$ siempre que x sea un múltiplo de π, o sea, $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots \pm n\pi, \ldots$ con $n \in \mathbb{N}$ de esta forma $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ siempre que $\frac{1}{x}$ sea un múltiplo de π, es decir, $\frac{1}{x}$ debe ser de la forma $n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$. Entonces, ¿cómo debe ser x? Puesto que $\frac{1}{x} = n\pi$ obtenemos fácilmente que $x = \frac{1}{n\pi}$, pero para esto, n debe ser distinto de 0. Esto nos dice que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ siempre que $x = \frac{1}{n\pi}$ con $n \neq 0$. Con lo anterior estamos en condiciones de construir una sucesión $\{z_n\}$ que converja en 0, esta sucesión es: $\{z_n\} = \left\{z_1 = \frac{1}{\pi}, z_2 = \frac{1}{2\pi}, z_3 = \frac{1}{3\pi}, \ldots, z_n = \frac{1}{n\pi}, \ldots\right\}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, sabemos también que sen $x = 1$ siempre que $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$con $n \in \mathbb{Z}$. De esta manera $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ siempre que $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, obteniendo así que $x = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right) + (2n\pi)}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Construyamos ahora una sucesión $\{y_n\}$ la cual converja a cero: $\{y_n\} = \left\{y_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}, y_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4\pi}, y_3 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 6\pi}, \ldots y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \ldots\right\}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Intercalemos los términos de las sucesiones $\{z_n\}, \{y_n\}$ y formemos la nueva sucesión que converja a 0: $\{x_n\} = \{z_1, y_1, z_2, y_2, z_3, y_3, \ldots, z_n, y_n, \ldots\}$.

Donde $\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots\}$; si denotamos a $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ preguntamos: ¿qué puede decirse acerca de la convergencia de $\{f(x_n)\}$? $\{f(x_n)\} = \{f(z_1), f(y_1), f(z_2), f(y_2), f(z_3), f(y_3), \ldots f(z_n), f(y_n), \ldots\}$

$$\{f(x_n)\} = \left\{f\left(\frac{1}{\pi}\right), f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}\right), f\left(\frac{1}{2\pi}\right), f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 4\pi}\right), f\left(\frac{1}{3\pi}\right), f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 6\pi}\right), \ldots,\right.$$

$$\left. f\left(\frac{1}{n\pi}\right), f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right), \ldots\right\}$$

$$\{f(x_n)\}=\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{3\pi}}\right),\right.$$

$$\left.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}}\right),\ldots,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right),\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right),\ldots\right\}$$

$$\{f(x_n)\}=\left\{\operatorname{sen}(\pi),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right),\operatorname{sen}(2\pi),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+4\pi\right),\operatorname{sen}(3\pi),\right.$$

$$\left.\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+6\pi\right),\ldots,\operatorname{sen}(n\pi),\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),\ldots.\right\}$$

$$\{f(x_n)\}=\{0,1,0,1,0,1\ldots,0,1,\ldots\}$$

Los elementos de la sucesión $\{f(x_n)\}$ se van intercalando entre ceros y unos, y de esta manera notamos que esta sucesión no converge, o sea, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\neq l_0$.

Hemos encontrado una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\forall n \;\; x_n\neq 0$ y con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, de tal forma que $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\neq l_0$. Como inicialmente se escogió a $l_0\in\mathbb{R}$ arbitrario, concluimos que $\forall l\in\mathbb{R}\;\;\exists\{x_n\}$ con $x_n\neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ donde $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)\neq l$, es decir, $\lim\limits_{n\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

EJERCICIOS

2.2.1 Sea $h(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\leq 1\\ 1/2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$.

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ no existe utilizando el teorema 2.2.1 (sugerencia, estime la sucesión $\{x_n\}=\{1+(-1)^n/n\}$).

2.2.2 Sea $p(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x/2 & \text{si} \quad x \in I \end{cases}$

(a) Bosqueje la gráfica de $p(x)$.

(b) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} p(x) \neq 1$ utilizando el teorema 2.2.1.

2.2.3 Sea $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in I \end{cases}$.

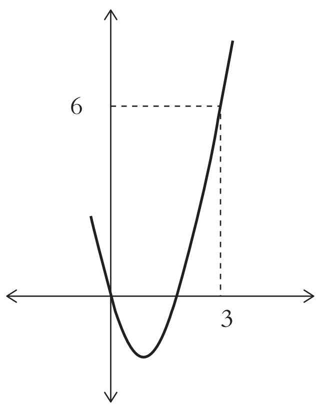
Demuestre $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existe $\forall a \in \mathbb{R}$.

Sección 2.3. Operaciones con límites

En esta sección se estudiarán las propiedades del límite de una suma, producto o cociente de funciones, entre otras. Estas operaciones se han manejado a nivel de reglas en cursos básicos de cálculo en bachillerato.

(1) Sea $f(x) = 2x^2 - 4x$ (figura 1).

Figura 1



(1) De una manera intuitiva, se observa que si x se aproxima al número 3, la función f se acercará al número 6, es decir, tendremos que $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 2x^2 - 4x = 6$.

Notamos también que f puede verse como la suma de dos funciones, ¿qué funciones? $f(x) = g(x) + h(x)$ donde $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = -4x$.

(2) Ahora, no es difícil ver que $\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} 2x^2 = 18$ y $\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3} -4x = -12$.

Entonces $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\big(g(x) + h(x)\big) = \lim_{x\to 3} g(x) + \lim_{x\to 3} h(x)$, o sea, el límite de la suma es igual a la suma de los límites.

Ahora, si $h(x) = \dfrac{1}{x}$ y $m(x) = x^2$, tendremos que $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe y $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. ¿Existirá $\lim_{x\to 0}\big(h(x) + m(x)\big)$? Veamos que $\lim_{x\to 0}\big(h(x) + m(x)\big) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} + x^2$ no existe, ya que para una $l \in \mathbb{R}$ arbitraria la sucesión

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \ni \frac{1}{n} \neq 0 \quad \forall n, \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty}\left[h(x_n) + m(x_n)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n + \frac{1}{n^2}\right]$$

no existe.

¿Qué diferencia existe con el caso anterior del inciso (1)? En el caso anterior, los límites de los sumandos sí existen.

En el siguiente teorema se justifica el juicio emitido en (1) extrayendo las hipótesis de (2).

Teorema 2.3.1

Sean *f* y *g* con $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m \Rightarrow$
$\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right) = \lim_{x\to a} f\left(x\right) + \lim_{x\to a} g\left(x\right) = l + m$

Demostración

¿Qué significa demostrar que $\lim_{x\to a}\left(f(x) + g(x)\right) = l + m$?

Que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(l + m\right)\right| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

El problema es, entonces, tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y construir un $\delta_0 > 0$, el cual cumpla que $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow \left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(l + m\right)\right| < \varepsilon_0$; partiendo de esta última desigualdad

$$\left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(l + m\right)\right| = \left|f(x) + g(x) - l - m\right| =$$

$$\left|f(x) - l + g(x) - m\right| \leq \left|f(x) - l\right| + \left|g(x) - m\right| \ldots (I) .$$

¿Qué nos dicen los supuestos? $\lim_{x\to a} f(x) = l$, lo cual equivale a decir que $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (definición 2.1.1),
y $\lim_{x\to a} g(x) = m$, lo cual nos dice que $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$ $|g(x) - m| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

De esta forma, para nuestra $\varepsilon_0 > 0$ tomada inicialmente, tendremos que $\exists \delta_1 > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$ y también $\exists \delta_2 > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon_0$.

Ahora, si tomamos a $\delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos que $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_3$ se cumplirá $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$, implicándose respectivamente que se cumplen $|f(x) - l| < \varepsilon_0$ y $|g(x) - m| < \varepsilon_0$. Sumando estas dos últimas desigualdades tenemos que $|f(x) - l| + |g(x) - m| < 2\varepsilon_0$, regresando a (I) concluimos que $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow \left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(l + m\right)\right| \le 2\varepsilon_0$.

Antes de continuar es necesario aclarar que:

La expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ significa que $f(x)$ estará cerca de *l* siempre que *x* esté cerca de *a*. Si en un problema se pide demostrar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, empezamos dando un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario (pensamos en uno pequeño), y si encontramos un $\delta_0 > 0$ tal que $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - l| < M\varepsilon_0$ con *M* como constante, la δ_0 será la solución al problema, ya que $M\varepsilon_0$ es pequeña (piense que ε_0 puede valer $\frac{1}{10^{10}}$, $\frac{1}{10^{100}}$, $\frac{1}{10000^{10000}}$, o valores aun más pequeños).

En la demostración que se está haciendo, tenemos que hemos encontrado un $\delta_3 > 0$ tal que $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow \left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(l + m\right)\right| < 2\varepsilon_0$, por lo tanto la δ_0 buscada es $\delta_0 = \delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. De esta manera, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria se cumplirá que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(l + m\right)\right| < 2\varepsilon$. Finalmente $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = l + m$.

Problema 2.3.1

Utilice el teorema 2.3.1 para calcular $\lim\limits_{x \to \pi}\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)$ donde $f(x) = \text{sen}\left(x\right)$ y $g(x) = x^2$

Demostración

Para utilizar el teorema anterior tenemos que ver que se cumplen las hipótesis.

$\lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\pi} g(x) = \lim\limits_{x\to\pi} x^2 = \pi^2$, observamos que las funciones f y g cumplen con las condiciones del teorema, de esta manera $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to\pi}\left(\operatorname{sen}(x)+x^2\right) = \lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{sen}\left(x\right) + \lim\limits_{x\to\pi} x^2 = 0+\pi^2$.

Problema 2.3.2

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}+\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

Solución

Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Se sabe que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}$ (problema 2.1.4) y $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ (ejercicio 2.1.3). Con lo anterior se cumplen las condiciones del teorema 2.3.1, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}+\dfrac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4} + \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{1}{4}+4 = \dfrac{17}{4}$.

Ahora, se sabe que $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ donde x^2; podemos ver a esta función como $x^2 = \left(x\right)\left(x\right)$, es decir $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = \lim\limits_{x\to 3}\left(x\right)\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3}\left(x\right)\lim\limits_{x\to 3}\left(x\right) = 9$.

Intuitivamente se puede pensar que el límite del producto es igual al producto de los límites, siempre y cuando existan estos. Formalicemos esta afirmación.

Teorema 2.3.2

Sean f y g funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, con $l,m,a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x) = lm$

Demostración

¿Qué significa demostrar $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right) = lm$? Que $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \ni \forall x$ que cumple $0<\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)g(x)-lm\right|<\varepsilon$, más generalmente $\left|f(x)g(x)-lm\right|<M\varepsilon_0$ con M constante.

Entonces el problema consiste en tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y con esto construir un $\delta_0 > 0$, el cual cumpla que $\forall x$ si $0 < |x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)g(x) - lm| < M\varepsilon_0$ con M constante.

Estimemos a

$$|f(x)g(x) - lm| = |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \leq$$
$$|f(x)g(x) - f(x)m| + |f(x)m - lm| = |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l|.$$

De las hipótesis se tiene que:

(I) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, o sea, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

(II) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m$, o sea, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$ (definición 2.1.1).

Así, para nuestra $\varepsilon_0 > 0$ tomada inicialmente, tenemos que:

$$\exists \delta_1 > 0 \ \ni \ \forall x \text{ si } 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0 \ldots \text{(III)}$$
$$\exists \delta_2 > 0 \ \ni \ \forall x \text{ si } 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon_0 \ldots \text{(IV)}$$

A la expresión (III) podemos escribirla como

$$|f(x)| - |l| \leq |f(x) - l| < \varepsilon_0 \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon_0 + |l| \ldots \text{(V)}$$

Luego, tomando $\delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ si x cumple con $0 < |x-a| < \delta_3$ implicamos, por (V) y (IV) respectivamente, que $|f(x)| \leq \varepsilon_0 + |l|$ y $|g(x) - m| < \varepsilon_0$.

De esta manera,

$$\forall x \text{ si } 0 < |x-a| < \delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow |f(x)g(x) - lm| \leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - l|$$
$$< (\varepsilon_0 + |l|)\varepsilon_0 + |m|\varepsilon_0 = (\varepsilon_0 + |l| + |m|)\varepsilon_0 \text{ (observe que } M = \varepsilon_0 + |l| + |m|\text{)}.$$

De esta manera tendremos que $\left|f(x)g(x)-lm\right|<M\varepsilon_0$, esto nos dice que la δ_0 buscada es $\delta_0=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$.

Como $\varepsilon_0>0$ es arbitraria, se tendrá que
$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \ni\ \forall x$ si $0<\left|x-a\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)g(x)-lm\right|<M\varepsilon$ con M constante.

Por lo tanto, es cierto que $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=lm$

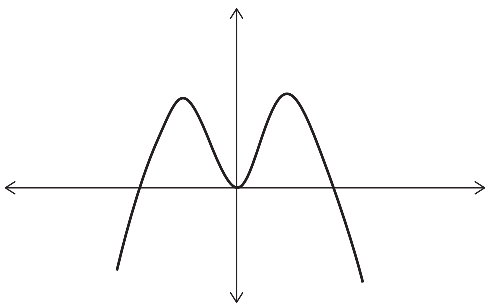
Problema 2.3.3

¿Quién es $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{sen}x$?

Solución

(figura 2)

Figura 2



Utilizando el teorema 2.3.2, a la función $f\left(x\right)=x\operatorname{sen}x$ podemos verla como $f(x)g(x)=x\operatorname{sen}x$ donde $f(x)=x$ y $g(x)=\operatorname{sen}x$. Luego, tenemos $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x=0$.

Como existen los límites de ambas funciones, se implica que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{sen}x=\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x\right)=0$.

Se le sugiere al lector que demuestre que $\lim\limits_{x\to a}c=c\ \ \forall a,c\in\mathbb{R}$.

¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to a}c\,f(x)$ donde c es una constante real y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$? Observe que si $f(x)=x^3$ y $c=2$ y queremos calcular $\lim\limits_{x\to 3}2x^3$, este resultado lo podemos intuir fácilmente.

$\lim\limits_{x \to 3} 2x^3 = 2(27) = 54$, donde sabemos que $\lim\limits_{x \to 3} x^3 = 27$. Se puede pensar que $\lim\limits_{x \to 3} 2f(x) = 2\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2(27)$, es decir, $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = cl$.

Veamos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.1

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} cf(x) = cl$ con $c \in \mathbb{R}$.

Demostración

¿Cómo demostramos que $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = cl$?

De las hipótesis, a la función $cf(x)$ podemos verla como el producto de dos funciones: la función $f(x)$ y la función $g(x) = c$ (g es un función constante).

Ahora $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, esto nos dice que las funciones f y g cumplen con las condiciones del teorema 2.3.2, por lo tanto, el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x \to a} cf(x) = \lim_{x \to a} g(x)f(x) = \lim_{x \to a} g(x) \lim_{x \to a} f(x) = cl.$$

(3) Nosotros ya tenemos los siguientes resultados $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}$ y $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$, para este caso particular si llamamos $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ tenemos que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$ y también $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ donde notamos que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x)} = 4$.

Para la situación anterior se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = l$ y también $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

(4) Ahora $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} x = \dfrac{1}{x}$ no existe.

¿Existe algo que diferencie la situación presentada en (3) con la presentada en (4)? Podemos ver que la diferencia entre las situaciones (3) y (4) es que en (3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = l \neq 0$ y en (2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, y precisamente al calcular el límite de la función $1/f(x)$ cuando $x \to 0$ obtenemos un cero en el denominador.

Lema 2.3.1

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ con $l \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$

Demostración

¿Qué significa que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$?

Que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\ni\; \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l} \right| < \varepsilon$ (definición 2.1.1), o más generalmente $\left| \dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l} \right| < M\varepsilon$ con M constante.

Veamos lo que nos dice este último valor absoluto

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l - f(x)}{f(x)l} \right| = \frac{|l - f(x)|}{|f(x)l|} = \frac{1}{|f(x)|}\frac{1}{|l|}|f(x) - l| \ldots \text{(I)}$$

Como por hipótesis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \neq 0$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ tal que $\forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ donde esta última desigualdad nos dice que $|l| - |f(x)| \leq |l - f(x)| = |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |l| - \varepsilon \leq |f(x)|$ y se tendrá $\dfrac{1}{|f(x)|} \leq \dfrac{1}{|l| - \varepsilon}$ siempre y cuando $|l| - \varepsilon$ se una cantidad positiva y distinta de cero, cosa que se puede tener (¿por qué?). De lo anterior se tienen dos situaciones:

a) Para nuestro $\varepsilon_0 > 0 \;\; \exists \delta_1 > 0 \;\ni\; \forall x$ sin $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$

b) Para $\varepsilon_1 = \dfrac{|l|}{2}$ se tendrá que

$\exists \delta_2 > 0 \;\ni\; \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_1 = \dfrac{|l|}{2}$

$|l| - |f(x)| \leq |l - f(x)| = |f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2}$ lo que se traduce en

$|l| - \dfrac{|l|}{2} < |f(x)| \Rightarrow \dfrac{|l|}{2} < |f(x)| \Rightarrow \dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|l|}$.

Ahora, si tomamos a $\delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, todas las x que cumplan con $0 < |x-a| < \delta_3$ cumplirán con $0 < |x-a| < \delta_1$ y $0 < |x-a| < \delta_2$.

De la primera desigualdad y de (a) se obtiene $|f(x)-l| < \varepsilon_0$ y de la segunda desigualdad y de (b) se obtiene $\dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|l|}$.

Luego, conectado esto con lo obtenido en (I) se tendrá:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{1}{|f(x)|}\frac{1}{|l|}|f(x)-l| < \frac{2}{|l|}\frac{1}{|l|}\varepsilon_0 = \frac{2\varepsilon_0}{|l|^2}$$

Como ε_0 es arbitraria se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$ $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l}\right| < M\varepsilon$ (M constante), lo cual significa que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

Teorema 2.3.3

Sean f y g funciones donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{l}{m}$

Demostración

Utilizando el teorema 2.3.2 y el lema 2.3.1, ¿cómo demostramos que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$?

Procedamos analizando $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$:

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)\dfrac{1}{g(x)} \ldots$(I).

A la función $\dfrac{1}{g(x)}$ podemos llamarla $h(x)$, en donde, por el lema 2.3.1, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{m}$ puesto que $m \neq 0$. Con esto, y regresando a (I), se tendrá:

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)\dfrac{1}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x)h(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} h(x) = l\left(\dfrac{1}{m}\right)$ (por el teorema 2.3.2), quedando así la demostración del teorema.

Problema 2.3.4

Calcule $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2x^2+\operatorname{sen}x}{3x^2+2}$.

Solución

Hagamos algunas asignaciones:

$f(x)=2x^2+\operatorname{sen}x$ y $g(x)=3x^2+2$

Nótese que $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}2x^2+\operatorname{sen}x=\lim\limits_{x\to\pi}2x^2+\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{sen}x\ldots(I)$ (por el teorema 2.3.1). Continuando con (I), $\lim\limits_{x\to\pi}2x^2+\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{sen}x=2\lim\limits_{x\to\pi}x^2+\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{sen}x=2\left(\pi\right)^2+0$ (por el corolario 2.3.1), por lo tanto $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)=2\pi^2$.

De la misma manera $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}3x^2+2=\lim\limits_{x\to\infty}3x^2+\lim\limits_{x\to\infty}2\ldots(II)$ (por el teorema 2.3.1).

Continuando con (II), tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty}3x^2+\lim\limits_{x\to\infty}2=3\lim\limits_{x\to\infty}x^2+\lim\limits_{x\to\infty}2=3(\pi)^2+2$ (por el corolario 2.3.1), por lo tanto $\lim\limits_{x\to\pi} g(x)=3\pi^2+2$.

Ahora, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2x^2+senx}{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y como $\lim\limits_{x\to\pi} g(x)\neq 0$, esto nos dice que podemos utilizar el teorema 2.3.3, por lo tanto $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2x^2+\operatorname{sen}x}{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pi} f(x)}{\lim\limits_{x\to\pi} g(x)}=\dfrac{2\pi^2}{3\pi^2+2}$.

Los teoremas 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3 fueron demostrados por criterio $\varepsilon-\delta$ con la definición 2.1.1, pero existen demostraciones alternas utilizando sucesiones.

Como un ejercicio, demostraremos el teorema 2.3.3 utilizando el teorema 2.2.1 de la sección anterior.

Teorema 2.3.3

Sean *f* y *g* funciones donde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{l}{m}$

Demostración

En términos del teorema 2.2.1, ¿qué significa que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{l}{m}$?

Que $\forall\{x_n\}$ con $x_n \neq a \quad \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a \Rightarrow \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)}=\dfrac{l}{m}$.

De esta manera tomemos $\{x_n\}$ arbitraria que cumpla con $x_n \neq a \quad \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$ y probemos que $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)}=\dfrac{l}{m}$.

Progresivamente, como $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=m$, se tiene que $\forall\{x_n\}$ con $x_n \neq a \quad \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$ y $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=m$, por lo tanto en particular para nuestra $\{x_n\}$ tomada al principio, se tendrá que $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$ y $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=m\neq 0$.

Ahora $\{f(x_n)\}$ y $\{g(x_n)\}$ son sucesiones que convergen a l y m respectivamente, y como el límite del cociente de sucesiones es el cociente de los límites, con el límite del denominador distinto de cero, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}f(x_n)}{\lim\limits_{x\to\infty}g(x_n)}=\dfrac{l}{m}$, lo que se quería demostrar.

Así, como $\{x_n\}$ es arbitraria, se cumplirá que $\forall\{x_n\}$ con $x_n \neq a \ \forall n$ y $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a \Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{l}{m}$, por lo tanto se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=\dfrac{l}{m}$.

Las demostraciones de los teoremas 2.3.1 y 2.3.2 utilizando sucesiones, se le sugieren al lector como ejercicio.

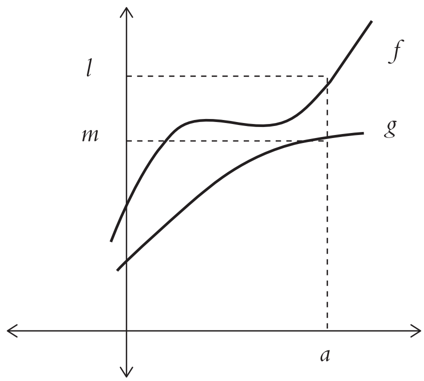
Problema 2.3.5

Sea $g(x)\leq f(x) \quad \forall x$ con $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=m \Rightarrow m\leq l$

Solución

(figura 3)

Figura 3



¿Qué significa demostrar que $m \leq l$? Significa que $m - l \leq 0$ o $0 \leq l - m$. De los supuestos tenemos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ y también $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, esto implica que

(I) ...$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

(II) ...$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0|x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$.

Ahora, si tomamos un $\varepsilon_0 > 0$ arbitratio, tendremos por (I) que $\exists \delta_1 > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$ y por (II), se tendrá que $\exists \delta_2 > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon_0$.

A continuación, fijemos un x_0 el cual cumpla con $0 < |x_0 - a| < \delta_1$ y $0 < |x_0 - a| < \delta_2$. Si lo anterior ocurre, tendremos por (I) y (II), respectivamente, que $|f(x_0) - l| < \varepsilon_0$ y $|g(x_0) - m| < \varepsilon_0$.

Se sabe que $f(x_0) - l \leq |f(x_0) - l| < \varepsilon_0$... (III) y $m - g(x_0) \leq |g(x_0) - m| < \varepsilon_0$... (IV).

De (III) se obtiene que $f(x_0) < \varepsilon_0 + l$ y de (IV) se tiene que $m - \varepsilon_0 \leq g(x_0)$. Luego, como por hipótesis se tiene que $g(x) \leq f(x) \ \ \forall x$, en particular se cumplirá $m - \varepsilon_0 \leq g(x_0) \leq f(x_0) \leq \varepsilon_0 + l \Rightarrow m - l \leq 2\varepsilon_0$.

La última desigualdad nos dice que $m - l \leq 0$. ¿Por qué? Porque de no ocurrir así, tendría que pasar $m - l > 0$ y como hemos llegado a que $m - l \leq 2\varepsilon_0$ y la ε_0 es arbitraria, ésta puede tomar desde un principio el valor $\varepsilon_0 = \dfrac{m - l}{4} > 0$ llegando así a tener $m-l \leq 2\varepsilon_0 = 2\dfrac{m-l}{4} = \dfrac{m-l}{2} \Rightarrow 1 \leq \dfrac{1}{2}$, lo cual es absurdo, por lo tanto, concluimos que $m-l \leq 0$.

Problema 2.3.6

Si $h(x) \leq g(x) \leq f(x) \quad \forall x$ y se tiene $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

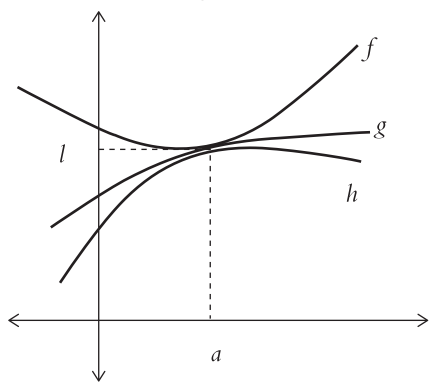
Solución

Geométricamente la situación aparece en la figura 4.

¿Qué significa que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$?

Aplicando el problema 2.3.5 a la triple desigualdad $\lim\limits_{x\to a} h(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x) \leq \lim\limits_{x\to a} f(x)$, después por hipótesis $l \leq \lim\limits_{x\to a} g(x) \leq l$, lo que equivale a tener $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Figura 4



Problema 2.3.7

Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = l$ y $b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(bx)}{x} = bl$.

Solución

De la expresión que se concluye se tiene:

$$(\mathrm{I})\ldots \lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x}=\frac{b}{b}\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x}=b\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{bx}$$, si llamamos $bx=y$ tendremos

$$(\mathrm{II})\ldots \lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x}=b\lim_{x\to 0}\frac{f(y)}{y}.$$

Ahora, se tiene que si $x\to 0$, entonces $y\to 0$, por lo tanto de (II) tenemos $(\mathrm{III})\ldots b\lim_{x\to 0}\frac{f(y)}{y}=b\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}$.

De las hipótesis tenemos que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=l$, lo cual equivale a $\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=l$, de esta manera concluimos que $b\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=bl$, de donde finalmente, por (I), (II), (III) y la última igualdad, se tiene $\lim_{x\to 0}\frac{f(bx)}{x}=bl$.

Problema 2.3.8

Si $\lim_{x\to a} f(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to a}|f(x)|=|l|$.

Demostración

¿Qué significa que $\lim_{x\to a}|f(x)|=|l|$?

Que $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \ni \forall x$ si $0<|x-a|<\delta \Rightarrow \big||f(x)|-|l|\big|<\varepsilon$ (definición 2.1.1).

De esta manera, tomemos un $\varepsilon_0>0$ arbitrario y construyamos un $\delta_0>0$, tal que $\forall x$ si $0<|x-a|<\delta_0 \Rightarrow \big||f(x)|-|l|\big|<\varepsilon_0$.

Como $\lim_{x\to a} f(x)=l$, esto significa que

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \quad \delta>0 \ni \forall x \text{ si } 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon,$$

por lo tanto, para nuestro ε_0 tomado inicialmente se tendrá $\exists \delta_1>0 \ni \forall x$ si $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon_0$; ahora como siempre se tiene $\big||f(x)|-|l|\big|\le |f(x)-l|$, entonces $\big||f(x)|-|l|\big|<\varepsilon_0$, lo anterior nos dice que la δ_0 buscada es $\delta_0=\delta_1$.

Como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se cumple que

$$\varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \ni \forall x \text{ si } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left||f(x)| - |l|\right| < \varepsilon,$$

de donde finalmente $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$.

EJERCICIOS

2.3.1 Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow$ existe un intervalo donde la función es acotada.

2.3.2 Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.

2.3.3 Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < 0$.

2.3.4 (a) Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ y $|h(x)| \le M \quad \forall x$ (M es constante) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$.

(b) A partir del inciso anterior argumente por qué

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

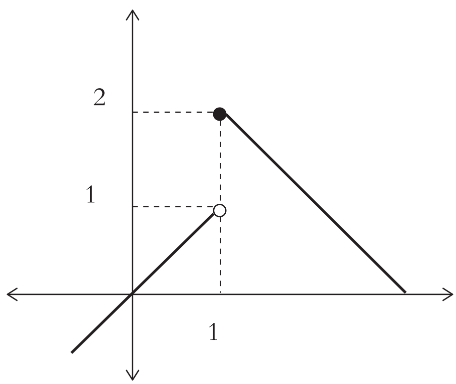
(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$ donde $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in I \end{cases}$

Sección 2.4. Límites laterales

Los límites laterales nos dan más elementos para decidir acerca de la existencia o no del límite de una función en un punto. Su aplicación más inmediata, aparece cuando las funciones a analizar son las llamadas "funciones llaves", como la que se presenta a continuación.

(1) Sea $h(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 1 \\ -x+3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ (figura 1).

Figura 1



Se puede observar que no existe $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ (demuéstrelo por medio del teorema 2.2.1), pero si nos acercamos a 1 por medio de valores x más grandes que 1 (a la derecha de 1), observamos que $h(x)$ se aproxima a 2.

Tomemos los valores de la sucesión $\{x_n\} = \left\{1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3} ...., 1+\frac{1}{n}, ...\right\}$.

Para n muy grande, el valor de $1+\left(\frac{1}{n}\right)$ será un número muy cercano al 1 y la sucesión de imágenes $\{h(x_n)\} = \left\{h(2), h\left(\frac{3}{2}\right), h\left(\frac{4}{3}\right), h\left(\frac{5}{4}\right), ..., h\left(1+\frac{1}{n}\right), ...\right\}$

$\{h(x_n)\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, .., 2-\frac{1}{n}, ...\right\}$ se irá aproximando a 2.

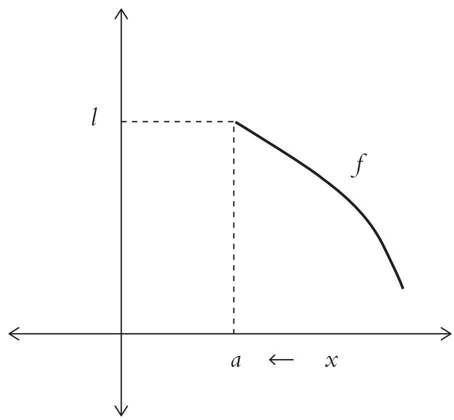
La sucesión $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ tiende a 1 y la sucesión $\left\{h\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = \left\{2-\frac{1}{n}\right\}$ tiende a 2.

Un análisis análogo nos dice que si nos aproximamos por valores x a la izquierda de 1, la función $h(x)$ se aproximará a 1.

De lo anterior concluimos que:

(a) $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe.
(b) Si x se acerca a 1 por el lado derecho $(x > 1)$, entonces $h(x)$ se aproximará a 2.
(c) Si x se acerca a 1 por el lado izquierdo $(x < 1)$, entonces $h(x)$ se aproximará a 1; $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe, pero existen "cierto tipo de límites" que dependen de la manera en que x se aproxima a 1, ya sea por $x > 1$ o $x < 1$.

Figura 2

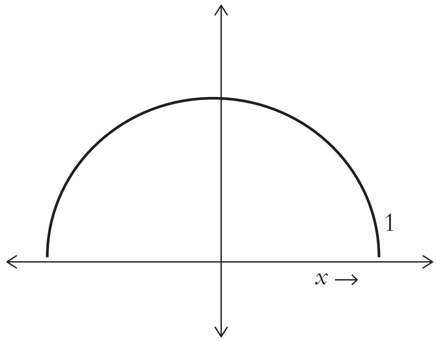


(2) $\lim_{x \to a} f(x) = l$ significa que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ (figura 2), pero si las x que estamos tomando, todas están a la derecha de a, se tendrá que $0 < |x - a| = x - a$.

DEFINICIÓN 2.4.1

Diremos que límite de $f(x)$ es l, cuando x tiende a a por la derecha si $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \ni \forall x$ si $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, y lo denotaremos por $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$.

Figura 3



¿Cómo podríamos definir el límite de $f(x)$ es m cuando x tiende a a por la izquierda? Tomando valores de x, todos menores que a, es decir, $0 < |x - a| = a - x < \delta$.

DEFINICIÓN 2.4.2

Diremos que límite de $f(x)$ es m, cuando x tiende a a por la izquierda si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$, y lo denotaremos por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = m$.

Observación

Para la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (figura 3).

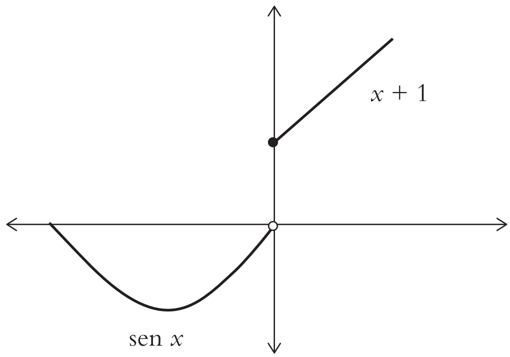
Antes de tener definidos los conceptos de límite por la derecha e izquierda, simplemente decíamos $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{1 - x^2} = 0$, pero ahora podemos decir con más precisión donde $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

La expresión $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ no tiene sentido, ya que los x a la derecha de 1 no son elementos del dominio de *f*.

Ejemplo 2.4.1

De la gráfica de la función $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (figura 4), se pregunta:

Figura 4



(a) ¿$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe?

(b) ¿Cuánto valen $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$?

A lo que se contesta:

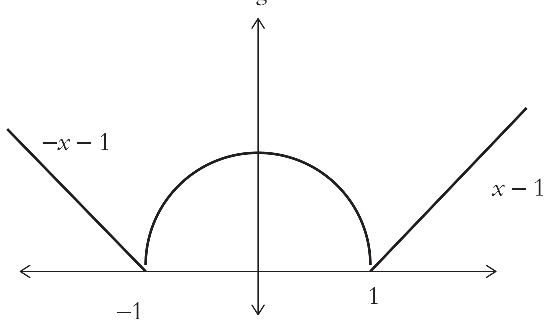
(a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe.

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = 0$.

Ahora sea $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si} \quad x < -1 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ (figura 5).

Podemos obtener los resultados siguientes:

Figura 5



$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0$.

Concluimos entonces que $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=0$, esto es, los límites laterales son iguales al límite de la función.

Así también tenemos que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0$ y $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -x-1=0$, de donde se observa $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -1^-} f\left(x\right)=0$.

Si en general tenemos a una función f para la cual $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$.

¿Qué puede decir acerca de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$? Que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Demostremos formalmente esta afirmación.

Afirmación 2.4.1

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Demostración

¿Qué significa que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$?

Que $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \;\; \delta>0 \;\ni\; \forall x$ si $0<\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon$ (definición 2.1.1).

De esta manera, el problema es tomar un $\varepsilon_0>0$ arbitrario y con esto construir (proponer o dar evidencia de su existencia), un δ_0 que cumpla que $\forall x$ si $0<\left|x-a\right|<\delta_0 \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon_0$.

Partiendo de los supuestos se tiene que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$, lo cual significa que $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \;\; \delta>0 \;\ni\; \forall x$ si $0<x-a<\delta \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon$ (definición 2.4.1).

Lo anterior nos dice que para nuestra $\varepsilon_0>0$ tomada inicialmente, $\exists \delta_1>0 \;\ni\; \forall x$ si $0<x-a<\delta_1 \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon_0$.

Así mismo, como $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ se tiene que $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists \;\; \delta>0 \;\ni\; \forall x$ si $0<a-x<\delta \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon$ (definición 2.4.2), y en este caso también, para nuestra $\varepsilon_0>0$ tomada inicialmente, $\exists \delta_2>0 \;\ni\; \forall x$ si $0<a-x<\delta_2 \Rightarrow \left|f(x)-l\right|<\varepsilon_0$.

Ahora, si tomamos a δ_3 como la mínima entre δ_1, δ_2, es decir, $\delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos:

$\forall x$ si $0 < x - a < \delta_3 ...(I) \Rightarrow 0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$ y

$\forall x$ si $0 < a - x < \delta_3 ...(II) \Rightarrow 0 < a - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$.

Notamos que en (I) $x - a = |x - a|$ y en (II) $a - x = |x - a|$, esto nos lleva a tener $\forall x$ si $0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$.

¿Quién es la δ_0 buscada? $\delta_0 = \delta_3 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$.

Luego, como la $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se tendrá que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, de donde se tiene $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Note que en el recíproco de esta afirmación no es cierto en general, ya que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ no garantiza que existan los límites laterales.

Afirmación 2.4.2

Supongamos que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existen; si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, entonces $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

Demostración

¿Qué significa demostrar $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$?

Significa que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$, demostraremos primero que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

¿Qué significa demostrar $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$?

Que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ que cumpla $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Tomemos entonces un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y demostremos que $\exists \delta_0 > 0$, tal que $\forall x$ que cumple $0 < x - a < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$.

De las hipótesis se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, esto significa que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ que cumpla $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

En particular se tiene que para nuestra $\varepsilon_0 > 0$ tomada inicialmente, $\exists \delta_1 > 0 \ \ni \ \forall x$ que cumple $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_0$.

Ahora, como por hipótesis existen valores del dominio de f a la derecha de a que cumplen $0 < |x - a| = x - a < \delta_1$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon_0$

Lo anterior nos dice que la δ_0 buscada es $\delta_0 = \delta_1$, por lo tanto como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se cumple que $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ que cumple $0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, lo cual es equivalente a escribir $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$.

La demostración de que $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$ es análoga a la anterior.

De esta manera se concluye que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l$.

Con estas dos afirmaciones tendremos un criterio práctico para decidir cuándo una función tiene límite o no.

Ejemplo 2.4.2

¿En qué números existe el límite de la función f y en qué otros no?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Para esta función preguntamos:

¿Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ cuando $a \neq 1$?

Por ejemplo, si a es mayor a 1, tendremos $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 2x = 2a$. Así también si a está a la izquierda de $1 (a < 1)$, tendremos $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} 3x - 1 = 3a - 1$.

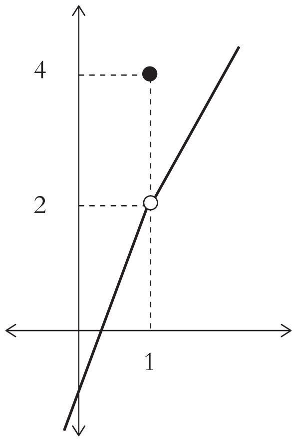
Contestamos la pregunta inicial:

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe cuando $a \neq 1$. Ahora ¿existe $\lim_{x \to 1} f(x)$?

Calculemos sus límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2 \ \text{y} \ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x - 1 = 2.$$

Figura 6



Como los límites laterales existen y son iguales a 2, utilizando la afirmación 2.4.1 concluimos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

Problema 2.4.1

Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = m$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = n$ con $m \neq n \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

Solución

Probemos este problema procediendo por contradicción.

Supongamos que $\exists l_0 \in \mathbb{R} \ni \lim\limits_{x \to a} f(x) = l_0$.

Ahora, como por hipótesis $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existen, se tienen, por la afirmación 4.2.2 anterior, que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_0$, lo cual nos dice que $m = n$, contradiciendo la hipótesis $m \neq n$.

Por lo tanto, es falso suponer que $\exists l_0 \in \mathbb{R} \ni \lim\limits_{x \to a} f(x) = l_0$, de esta forma, concluimos que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

Problema 2.4.2

Diga en qué valores de a existe $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, y en qué valores no, donde $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Solución

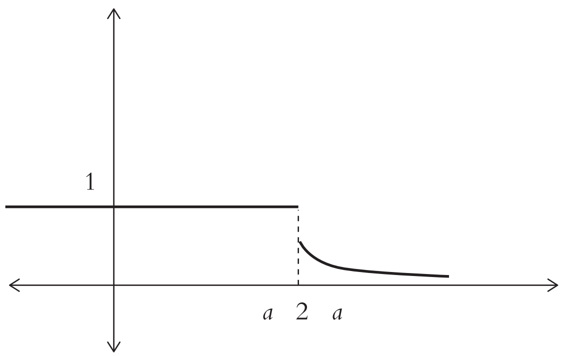
(Figura 7) No es difícil ver que si $a < 2$ entonces $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} 1 = 1$, y también si $a > 2$ entonces $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

Un valor singular se tiene cuando $a = 2$. Calculemos los límites laterales de g cuando x se acerca a 2 por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \text{ y } \lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} 1 = 1.$$

Por el problema 2.4.1, tenemos que, como los límites laterales existen pero son diferentes, se concluye que $\lim_{x\to a} g(x)$ no existe.

Figura 7



Observe las siguientes gráficas de funciones:

(a) Si $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (figura 8).

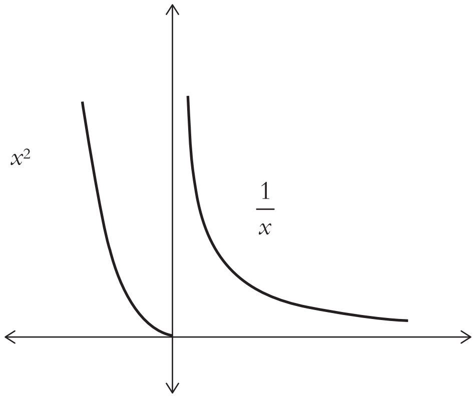
Notamos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ no existe y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$.

a. Si $g(x) = \frac{1}{x^2}$ notamos que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$ no existen.

Preguntamos: ¿existirá el límite en 0 para las funciones anteriores? La respuesta es no.

Se sugiere al lector la demostración de la siguiente afirmación.

Figura 8



Afirmación 2.4.3

Si alguno de los límites laterales no existe para la función f en $a \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

Los teoremas 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 y los problemas 2.3.5, 2.3.6, 2.3.8, poseen una interpretación de límites laterales.

Afirmación 2.4.4

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}$ con $x_n > a$ y $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Afirmación 2.4.5

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = m$, entonces

(a) $\lim\limits_{x \to a^+} [f(x) + g(x)] = l + m$.

(b) $\lim\limits_{x \to a^+} [f(x) g(x)] = lm$.

(c) $\lim\limits_{x \to a^+} [f(x) / g(x)] = l / m$ siempre que $m \neq 0$.

Afirmación 2.4.6

Sea $g(x) \leq f(x) \quad \forall x > a \quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = m \Rightarrow m \leq l$.

Afirmación 2.4.7

$$h(x) \le g(x) \le f(x) \quad \forall x > a \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to a^+} g(x) = l\,.$$

Afirmación 2.4.8

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \left| f(x) \right| = \left| l \right|.$$

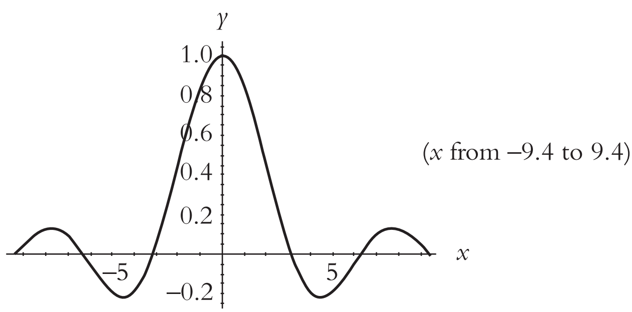
Se sugiere al lector como ejercicio escribir los enunciados de las cinco afirmaciones anteriores, pero en término de límites laterales por la izquierda.

Problema 2.4.3

Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

Demostración

Figura 9



Obtengamos información sobre $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, ver figura 10:

$x > 0$ en radianes
La longitud de arco $l = x$.
Área del triangulo $ABD = A_1$
Área del sector circular $ABD = A_2$

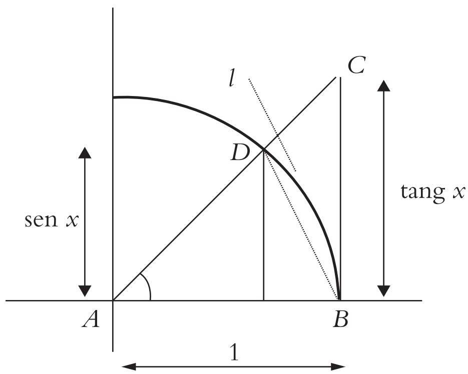
Área del triángulo $ABC = A_3$

$$A_1 = \frac{\overline{AB}\,\mathrm{sen}x}{2} = \frac{(1)\,\mathrm{sen}x}{2} = \frac{\mathrm{sen}x}{2}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}r^2 l = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}\right)^2 l = \frac{1}{2}(1)^2 l = \frac{x}{2}$$

$$A_3 = \frac{\overline{AB}\tan x}{2} = \frac{(1)\tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

Figura 10



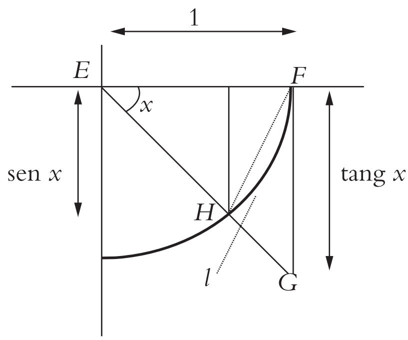
Notamos que $A_1 < A_2 < A_3$. Sustituyendo sus expresiones tenemos que $\frac{\mathrm{sen}x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2} = \frac{\mathrm{sen}x}{2\cos x} ...(I)$.

Como $\mathrm{sen}\,x, \cos x, \tan x > 0$ y $x > 0$, la desigualdad (I) se transforma en $\mathrm{sen}\,x < x < \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} < 1$ y $\cos x < \frac{\mathrm{sen}\,x}{x}$; esto nos lleva a tener $\cos x < \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} < 1 \Rightarrow \cos x \leq \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} \leq 1$.

Luego, como $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ y $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$, estamos en las condicione para utilizar la afirmación 2.4.7, por lo tanto $\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} = 1$.

Hagamos ahora un análisis, considerando un arco l negativo. Grafiquemos la situación (figura 11):

Figura 11



Longitud del arco $l = x$

Área del triángulo $EFH = C_1$

Área del sector circular $EFH = C_2$

Área del triángulo $EFG = C_3$

$$C_1 = \frac{\overline{EF}\operatorname{sen} x}{2} = \frac{(1)\operatorname{sen} x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{2} r^2 l == \frac{1}{2}\left(1\right)^2 x = \frac{x}{2}$$

$$A_3 = \frac{\overline{EF}\tan x}{2} = \frac{(1)\tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

Luego, como $x < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x < 0, \tan x < 0$ y $\cos x > 0$.

La relación entre C_1, C_2 y C_3 es $C_1 > C_2 > C_3$, sustituyendo sus valores tenemos $\frac{\operatorname{sen} x}{2} > \frac{x}{2} > \frac{\tan x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x > x > \tan x$; de aquí se tiene que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ (ya que $x < 0$) y también como $x < 0$ y $\cos x > 0$ de la desigualdad $x > \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se implica que $\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$.

Ahora, como se sabe $\lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$, estamos en condiciones de utilizar la afirmación 2.4.7 en su variación de límite por la izquierda, de donde concluimos $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Se ha obtenido $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, que son las condiciones de la afirmación 2.4.1, por lo tanto, se concluye que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Problema 2.4.4

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

Solución

No es difícil visualizar que $\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ se parece a la forma $\dfrac{f(bx)}{x}$, de donde se puede designar $f(x)=\operatorname{sen} x$ con $b=5$.

El problema 2.3.7 nos dice que si $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(bx)}{x}=bl$ con $b\neq 0$.

Nosotros tenemos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$ y $b=5$, por lo tanto concluimos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(bx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}=5(1)$, finalmente $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}=5$.

Problema 2.4.5

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Solución

Analicemos a la función $\dfrac{1-\cos x}{x}$.

Observe que no podemos aplicar el teorema 2.3.3 (que habla sobre el límite del cociente entre funciones), ya que no puede hacerse $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}1-\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}x}$, puesto que $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ y dicho teorema pide como condición que el límite de la función que parece en el denominador sea distinto de 0.

Procedamos de otra forma:

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos x}{x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\frac{1-\cos^2 x}{x\left(1+\cos x\right)}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\left(1+\cos x\right)}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

Observamos que en la última expresión aparece la función $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, de la cual conocemos su límite cuando x tiende a 0, pero ¿conocemos $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$? Tratemos de calcularlo.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x}{\lim\limits_{x\to 0}1+\cos x}=\dfrac{0}{2}=0$, de acuerdo con el teorema 2.3.3.

Ahora, regresando a nuestro problema inicial:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}\right)$, el límite del producto es el producto de los límites siempre que existan los límites de los factores, de esta forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=(1)(0)=0,$$

Problema 2.4.6

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}$.

Solución

Note nuevamente que no se puede utilizar el teorema 2.3.3, puesto que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x=0$, de esta forma escribimos a $\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}$ como:

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen}x\left(1+\cos x\right)}=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}x\left(1+\cos x\right)}=\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x},$$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}x}{\lim\limits_{x\to 0}1+\cos x}=\dfrac{0}{2}=0.$

Problema 2.4.7

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}5x}$.

Solución

(No se puede aplicar el teorema 2.3.3).

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{x}{x}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{x}{\operatorname{sen} 5x}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x},$$

de aquí se tiene que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} 5x} = \frac{1}{5}$ (ver lema 2.3.1 y problema 2.3.7),

y también $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} 5x}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} 5x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right) = \frac{1}{5}(3).$$

EJERCICIOS

2.4.1 Demuestre las afirmaciones 2.4.4, 2.4.5, 2.4.7, 2.4.6, 2.4.8 y su modalidad en límite por la izquierda.

2.4.2 Por medio de los límites laterales diga si existe

$$\lim_{x\to 2} f(x) \text{ con } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<2 \\ 3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2.4.3 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ existe donde $(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

2.4.4 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(-x)$.

2.4.5 Calcule los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\csc 2x}{\cot x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x+\pi/2)}{x}$

2.4.6 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = 12$.

III. Continuidad

En este capítulo se estudiará una de las propiedades más importantes de una función de variable real, la de ser continua. Primero se estudiará continuidad en un punto (número) y posteriormente en un intervalo. Sobre el concepto de continuidad de una función gira una gran cantidad de resultados del cálculo infinitesimal. En la primera sección se estudia lo que entenderemos por una función continua en un punto, partiendo de nociones geométricas y concluyendo la continuidad en términos de cuantificadores.

En la segunda se establecen resultados entre la continuidad de una función y la convergencia de sucesiones; asimismo, se prueba la continuidad de una función "sorprendente" en el conjunto de los números irracionales entre 0 y 1, esto es, si dibujamos de manera tradicional puntos de su gráfica, se podría pensar que la función no es continua en ningún punto donde está definida, pero no es así. Lo anterior ubica la forma de proceder en el quehacer matemático: sujetarse a las definiciones y construcciones que se vayan realizando, siempre que haya consistencia.

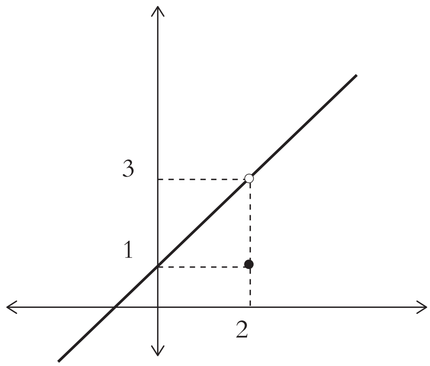
En la penúltima sección se establecen resultados de suma, producto y cociente entre funciones continuas, y también un resultado importante sobre la composición de funciones y continuidad. También se establece y prueba un resultado útil en lo teórico y práctico para el cálculo de límites, que establece que cuando el límite de una función compuesta puede calcularse encontrando la imagen del límite de una de las funciones que intervienen en la composición.

Por último, se estudia la relación entre la continuidad y los límites laterales, estableciéndose los conceptos de continuidad por la izquierda y por la derecha, y se define la continuidad de una función en un intervalo.

Sección 3.1. Continuidad en un punto

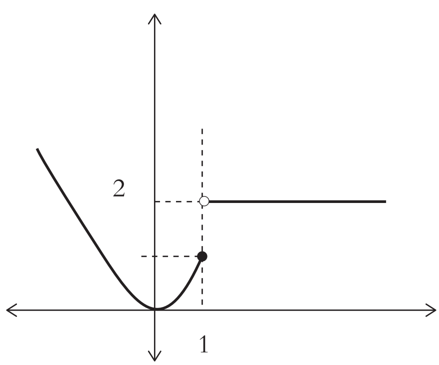
(1) Observando la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$ (figura 1), podemos decir, de una primera impresión, que f "pierde continuidad en $x=2$".

Figura 1



(2) Así también, para la función $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ (figura 2), se puede decir que ésta se "rompe cuando $x=1$", "pierde continuidad en $x=1$".

Figura 2



Además, notamos que $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe, pero $\lim_{x\to 1^+} g(x)$ y $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ si existen, respectivamente son 2 y 1.

Figura 3

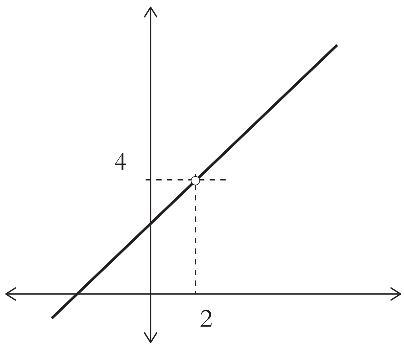
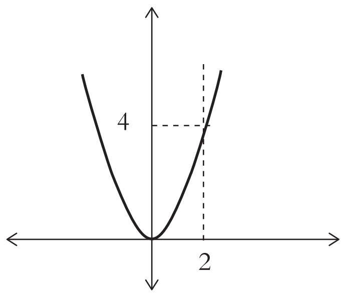


Figura 4



(3) Para la función $l(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ se tiene que no está definida en $x=2$ (figura 3). En este caso observamos que la función posee un "rompimiento".

(4) Ahora, sea $h(x)=x^2$ (figura 4), se sabe que $\lim_{x\to 2} h(x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$, donde precisamente $h(2)=4$. Notemos que para esta función no existe "rompimiento" en $x=2$.

De la situación (1), tenemos que f "pierde continuidad" en $x=2$, que $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ y $f(2)=1$, o sea, $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$.

De la situación (2), tenemos que g "pierde continuidad" en $x=1$, que $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe y $f(1)=1$.

De la situación (3), tenemos que la función l "pierde continuidad" en $x=2$, que $\lim_{x\to 2} l(x)=4$ y $l(2)$ no existe.

De la situación (4), tenemos que la función h no pierde continuidad en $x=2$ y que $\lim_{x\to 2} h(x)=h(2)$.

De estas conjeturas, parece que una función $p_1(x)$ pierde continuidad en $x=a$ si $\lim_{x\to a} p_1(x)\neq p_1(a)$ (figura 5), y la función $p_2(x)$ no pierde continuidad cuando $\lim_{x\to a} p_2(x)=p_2(a)$ (figura 6).

Figura 5

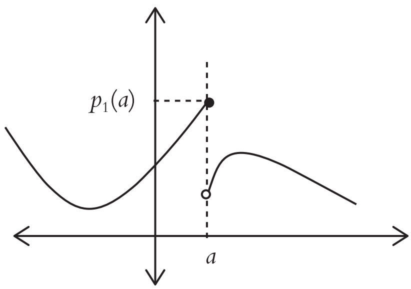
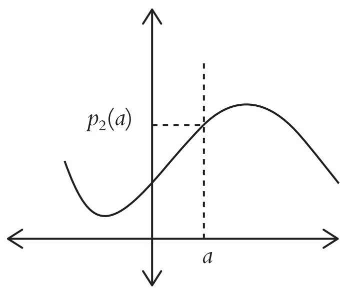


Figura 6



Finalmente, la función $l(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ pierde continuidad en $x=2$, donde $2 \notin Dl$.

De este análisis puede decirse que una función *f* pierde continuidad en $x=a$ si:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o $f(a)$ no existen; *a* es un número tal que para cualquier intervalo abierto $I(a)$ centrado en *a* siempre se tendrá que $I(a)\cap Df \neq \phi$ (ver figuras 2 y 3).

(ii) Existen ambos $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $f(a)$, y se tiene $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ (ver figura 1).

No se pierde continuidad en $x=a$ cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

DEFINICIÓN 3.1.1

Se dice que *f* es continua en *a* si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ahora, con la definición de función continua en un número se puede decir que:

(a) En la situación (1), como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$ y $f(2)=1$, se tiene $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, y por tanto *f* no es continua en 2.

(b) Como $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ no existe, *g* no es continua en 1.

(c) La función $h(x)=x^2$ es continua en 2, puesto que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4 = f(2)$.

(d) Para la función $l(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ tenemos $\lim\limits_{x\to 2} l(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ (ejercicio 2.1.3), pero $f(2)$ no existe ya que $2 \notin Dl$, por lo tanto *l* no es continua en 2.

Ejemplo 3.1.1

¿ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 2 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ es una función continua en cero? (figura 7).

Figura. 7

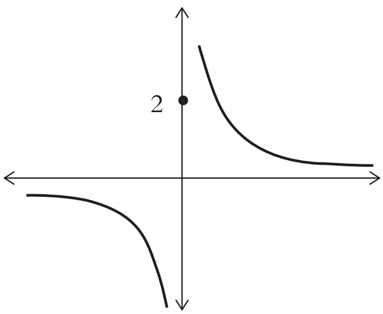
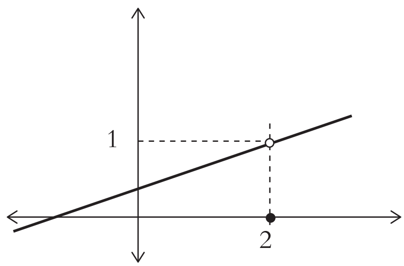


Figura. 8



La respuesta es no, ya que $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ no existe.

Problema 3.1.1

Sea $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x\neq 2\\ 0 & \text{si} \quad x=2\end{cases}$ ¿Es *f* continua en 2?

Solución

La situación gráfica aparece en la figura 8. Se nos está preguntando si *f* es continua o no en 2, para contestar esto, debemos ver qué relación existe entre $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ y $f(2)$.

Primero $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$, y segundo, se tiene que $f(2)=0$, de esta manera se tiene que $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)\neq f\left(2\right)$, y en estas condiciones contestamos negativamente a la pregunta inicial: la función f no es continua en 2.

Figura 9

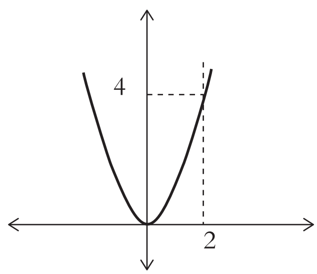
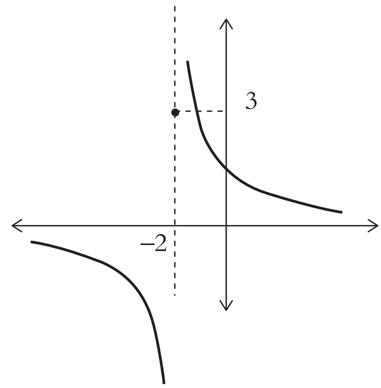


Figura 10



Problema 3.1.2

Sea $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si} \quad x \neq 2, \quad -2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x = 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$

(a) ¿Es g continua en 2?
(b) ¿Es g continua en -2?

Solución:

La situación gráfica aparece en la figura 10.

(a) Para contestar, necesitamos saber qué relación existe entre $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ y $g(2)$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \dfrac{1}{4}$ (problema 2.1.4), y también sabemos $g(2) = \dfrac{1}{4}$, esto nos dice que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = g(2)$, y de acuerdo con la definición 3.1.1, concluimos que g es continua en 2.

(b) Como en el inciso anterior, necesitamos saber qué relación guardan $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ y $g(-2)$, para poder contestar.

Sabemos que $\lim\limits_{x \to -2} g(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$ no existe (problema 2.2.2), y también sabemos que $g(-2) = 3$.

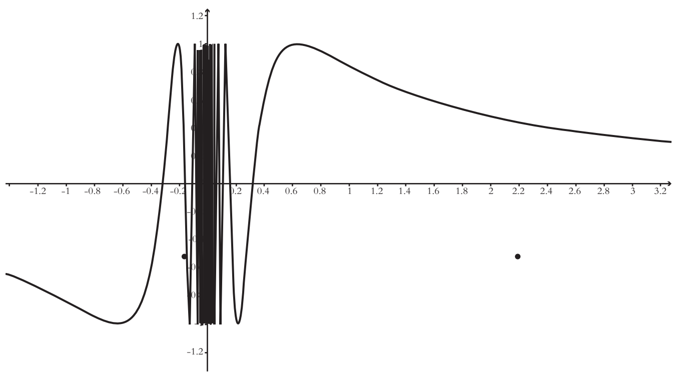
De esta manera g no es continua en -2.

Problema 3.1.3

Sea $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ ¿h es continua en 0? (figura 11).

Solución

Figura 11



Nuevamente, para poder contestar necesitamos saber qué relación existe entre $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ y $h(0)$. Se sabe que $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ no existe y $h(0) = \dfrac{1}{2}$.

Esto nos dice que $h(x)$ no es continua en 0.

Hasta el momento se han visto casos de funciones continuas o discontinuas en un número, para las cuales se tenía información acerca de sus límites. La definición de continuidad nos dice que *f* es continua en *a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y la hemos utilizado porque conocemos acerca de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, es decir, sabemos si existe o no, y con esto, lo único que hacemos es comparar con $f(a)$ para decidir si es continua o no en el número *a*.

Ahora pregúntese, ¿es continua la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el numero 4? Para que *f* sea continua en 4 se debe cumplir que $\lim_{x\to 4} f\left(x\right)=f\left(4\right)$.

Intuitivamente tenemos $\lim_{x\to 4} f\left(x\right)=\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2$ y sabemos que $f(4)=\sqrt{4}=2$, y concluimos que *f* es continua en 4.

Es claro que la función *f* es continua en 4 y, aún más, es continua para todos los elementos de su dominio, esto se demostrará utilizando la definición con los cuantificadores ε,δ, esto es, se probará que $\lim_{x\to 4} f\left(x\right)= f\left(4\right)$, observando que

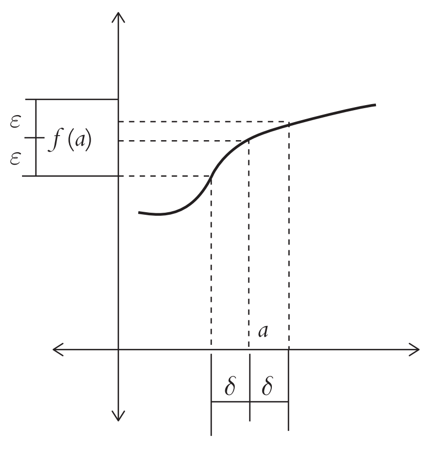
$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta>0\ \ \ni\ \forall x\ \text{ si }\ 0<\left|x-4\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(4)\right|<\varepsilon$$

Cuando se vio $\lim_{x\to a} f\left(x\right)=l$ para alguna función *f* y un número *a*, nuestro interés estaba enfocado en observar el comportamiento de la función cuando *x* estaba cerca de *a*, y no era necesario que la función estuviera definida en *a*; en el caso de la continuidad en *a*, es una condición fundamental que la función esté definida en el punto de análisis. De esta forma la desigualdad $0<\left|x-4\right|<\delta$ puede ser ligeramente cambiada por $\left|x-4\right|<\delta$.

Observe que la técnica para demostrar este problema es la misma que la vista con los problemas 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5. En el problema 3.1.6 se demostrará que $f(x)=\sqrt{x}$ es continua para cualquier número $a\geq 0$.

Ahora preguntemos, ¿qué significa, en términos de cuantificadores, que $\lim_{x\to a} f\left(x\right)= f\left(a\right)$, para alguna función *f* en un punto *a*? (figura 12).

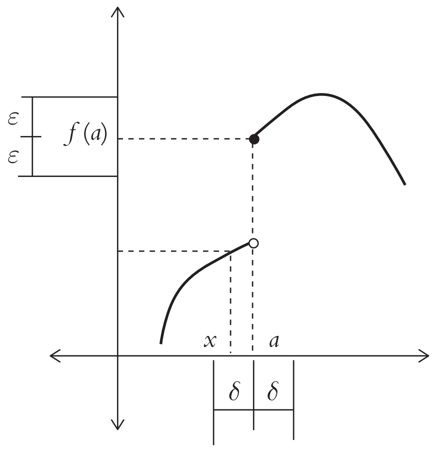
Figura 12



Significa que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\ni\; \forall x$ si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Así también, viendo la gráfica de otra función *f* (figura 13), la cual no es continua en *a*, tendremos que $\exists \;\; \varepsilon > 0 \;\ni\; \forall \delta > 0 \;\; \exists \;\; x \;\ni\; |x-a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Figura 13



DEFINICIÓN 3.1.2:

Decimos que *f* es continua en *a* si y sólo si $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\ni\; \forall x$ que cumplen $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Problema 3.1.4

Demostrar que $f(x)\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ es continua en 0 (figura 14).

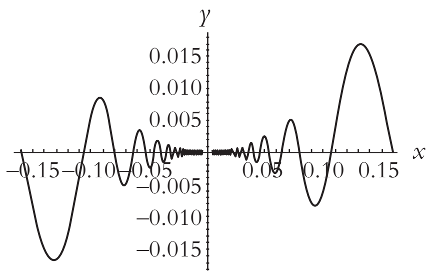
Solución

¿Qué significa que *f* sea continua en 0?

Por la definición 3.1.2, significa que

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\ni\; \forall x$ si $|x-0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Figura 14



(x from –0.2 to 0.2)

De esta manera, el problema es tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y, con esto, construir o proponer un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ con $|x-0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$.

Estimando la última desigualdad $|f(x)-f(0)| < \varepsilon_0$:

$$\left|f(x)-f(0)\right| = \left|x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0\right| = \left|x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| = x^2 \left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \ldots (I)$$

Recordemos que $|\operatorname{sen} a| \leq 1$ para cualquier a, en particular cuando $a = \dfrac{1}{x}$, por lo tanto $\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$; regresando a (I) se tendrá $|f(x)-f(0)| = |x^2|\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leq |x^2|1 \leq |x^2|$, ahora si tomamos $|x^2| = |x|^2 < \varepsilon_0 \Rightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon_0}$ y con esto proponemos a $\delta_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$.

Ahora verifiquemos que $\forall x$ con $|x-0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \varepsilon_0$.

Primeramente, tomemos $x_0 \neq 0$ arbitrario que cumpla $|x_0 - 0| < \delta_0$ y concluyamos que $|f(x_0) - f(0)| < \varepsilon_0$.

Como $|x_0 - 0| < \delta_0 \Rightarrow |x_0| < \sqrt{\varepsilon_0} \Rightarrow |x_0|^2 < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_0^2| < \varepsilon_0 \Rightarrow |x_0^2|1 < \varepsilon_0$, pero como $|f(x_0)-f(0)| = \left|x_0^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x_0} - 0\right| = \left|x_0^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x_0}\right| = |x_0^2|\left|\operatorname{sen}\dfrac{1}{x_0}\right| \leq |x_0^2|1$.

Se concluye que $|f(x_0)-f(0)| < \varepsilon_0$.

En caso de que $x_0 = 0$, el hecho de que $|x_0 - 0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x_0)-f(0)| < \varepsilon_0$ es obvio, puesto que $|0-0| = 0 < \delta_0$ y $|f(0)-f(0)| = 0 < \varepsilon_0$.

Como x_0 es arbitrario, se concluye que $\forall x$ si $|x-0| < \delta_0 = \sqrt{\varepsilon_0} \Rightarrow |f(x)-f(0)| < \varepsilon_0$, verificando así que la δ_0 buscada es efectivamente, $\delta_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$.

Finalmente, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se cumplirá que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \ni \forall x$ si $|x-0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Por lo tanto *f* es continua en 0.

Problema 3.1.5

Demostrar que $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en *a*, para cualquier $a \geq 0$.

Solución

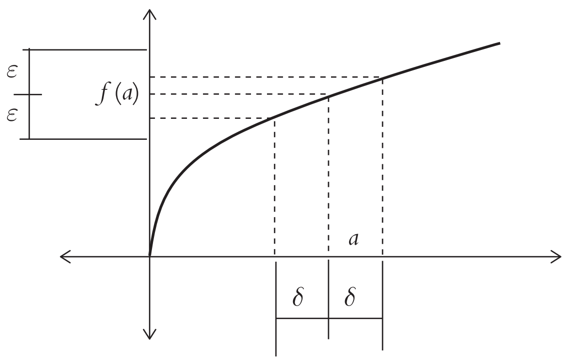
(Figura 15)

¿Qué significa que *f* sea continua para cualquier $a \geq 0$? Que si tomamos un $a_0 \geq 0$ arbitrario *f* es continua en a_0.

Supongamos primero que $a_0 > 0$ (ver figura 15). Ahora, ¿qué significa que *f* es continua en a_0?

Que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \ni \forall x$ si $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon$ (definición 3.1.2).

Figura15



Para demostrar esto, tomemos un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y construyamos o propongamos un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $|x - a_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon_0$.

Procedamos estimando $|f(x) - f(a_0)| < \varepsilon_0$: esto es $|f(x) - f(a_0)| = \left|\sqrt{x} - \sqrt{a_0}\right|$

$$= \left|\left(\sqrt{x} - \sqrt{a_0}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{a_0}}\right| = \frac{|x-a_0|}{\left|\sqrt{x}+\sqrt{a_0}\right|} = \frac{|x-a_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{a_0}} \ldots \text{(I)}.$$

Como $a_0 > 0$, siempre podemos escoger valores $x > 0$ para tener la exposición en (I), tomándolos en un intervalos de radio $\delta_1 = a_0$ centrado en a_0, $(0, 2a_0)$ (figura 16).

Ahora $\sqrt{a_0} < \sqrt{x} + \sqrt{a_0}$ nos dice que $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a_0}} < \frac{1}{\sqrt{a_0}}$, regresando a (I), tendremos $\left|f(x) - f(a_0)\right| < \frac{|x - a_0|}{\sqrt{a_0}} \ldots$(II).

Si tomamos $\frac{|x-a_0|}{\sqrt{a_0}} < \varepsilon_0$, construimos a $\delta_2 = \varepsilon_0 \sqrt{a_0}$.

Verifiquemos que $\delta_0 = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ cumple, efectivamente, que $\forall x$ si $|x - a_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon_0$.

Para esto, tomemos x_0 arbitrario que cumpla $|x_0 - a_0| < \delta_0$, con esto tenemos que si $|x_0 - a_0| < \delta_0 = \delta_1$ o si $|x_0 - a_0| < \delta_0 = \delta_2$, entonces siempre se tiene $|x_0 - a_0| < \varepsilon_0\sqrt{a_0}$, de donde concluimos $\frac{|x-a_0|}{\sqrt{a_0}} < \varepsilon_0$, luego por (II) se tiene $|f(x_0) - f(a_0)| < \varepsilon_0$, de esta manera, como x_0 es arbitrario, concluimos que $\forall x$ si $|x - a_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon_0$.

Luego, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se cumplirá que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \ni \forall x$ si $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon$, por lo tanto f es continua en a_0, y como a_0 es arbitraria, se cumple, finalmente, que *f* es continua en *a* para cualquier $a > 0$.

Sólo falta demostrar que *f* es continua en $a = 0$.

¿Qué significa que *f* sea continua en 0?

Que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \ni \forall x$ si $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$ (definición 3.1.2). Para ver esto, tomemos $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y construyamos un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $|x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$.

Procedamos estimando $|f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$:
$|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} \ldots$(III). Tomando a $\sqrt{x} < \varepsilon_0$, tendremos $|x| = x < \varepsilon_0^2$, y de esta manera construimos a $\delta_0 = \varepsilon_0^2$.

Verifiquemos que δ_0 cumple efectivamente que $\forall x$ si $|x - 0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$.

Para ver esto, tomemos un x_0 arbitrario que cumpla $|x_0 - 0| = |x_0| < \delta_0$, de esta manera se tiene que $|x_0| < \varepsilon_0^2 \Rightarrow |\sqrt{x_0}| = \sqrt{|x_0|} < \varepsilon_0$, y por (III) se concluye $\left|f(x_0)-f(0)\right|<\varepsilon_0$,de esta manera, como x_0 es arbitraria, se concluye $\forall x$ si $\left|x-0\right|<\delta_0 \Rightarrow \left|f(x)-f(0)\right|<\varepsilon_0$.

Luego, como $\varepsilon_0>0$ es arbitraria, se cumplirá que $\exists\ \delta>0 \ni \forall x$ si $\left|x-0\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f(0)\right|<\varepsilon$, por tanto *f* es continua en 0. Finalmente *f* es continua para cualquier $a\geq 0$.

Problema 3.1.6

Sea $g(x)=\sqrt[3]{x}$

(a) Demuestre que g es continua en a, $\forall a>0$.
(b) Demuestre que g es continua en 0.
(c) Demuestre que g es continua en a, $\forall a<0$.

Demostración (a)

¿Qué significa que g es continua en a, $\forall a>0$?

Que si tomamos $a_0>0$ arbitrario, entonces g es continua en a_0.

¿Qué significa que g sea continua en a_0?

Que $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\ \ \delta>0 \ni \forall x$ si $\left|x-a_0\right|<\delta \Rightarrow \left|g(x)-g(a_0)\right|<\varepsilon$ (definición 3.1.2).

De esta manera, el problema es tomar un $\varepsilon_0>0$ arbitrario, y con esto construir o proponer un $\delta_0>0$, el cual cumpla $\forall x$ si $\left|x-a_0\right|<\delta_0 \Rightarrow \left|g(x)-g(a_0)\right|<\varepsilon_0$.

Estimando $\left|g(x)-g(a_0)\right|<\varepsilon_0$ se tiene

$$\left|g(x)-g(a_0)\right|=\left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a_0}\right|=\left|x^{1/3}-a_0^{1/3}\right|\ldots(\mathrm{I}).$$

Se sabe que $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, si tomamos a $a=x^{1/3}$ y $b=a_0^{1/3}$ tendremos $\left(x^{1/3}\right)^3-\left(a_0^{1/3}\right)^3=\left(x^{1/3}-a_0^{1/3}\right)\left(\left(x^{1/3}\right)^2+x^{1/3}a_0^{1/3}+\left(a_0^{1/3}\right)^2\right)\Rightarrow$

$$x-a_0=\left(x^{1/3}-a_0^{1/3}\right)\left(x^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}+a_0^{2/3}\right)\Rightarrow x^{1/3}-a_0^{1/3}=\frac{x-a_0}{x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}}\Rightarrow$$

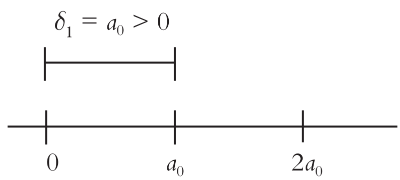
$$\left|x^{1/3}-a_0^{1/3}\right|=\frac{\left|x-a_0\right|}{\left|x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}\right|}$$

por tanto

$$\left|g(x)-g(a_0)\right|=\frac{\left|x-a_0\right|}{\left|x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}\right|}\ldots\text{(III).}$$

Ahora, como $a_0>0$, si restringimos la movilidad de x al intervalo $\left(0,2a_0\right)$ (figura 16).

Figura 16



para los x en el intervalo anterior se tendrá que la cantidad $x^{1/3}$ y $a_0^{1/3}$ son siempre positivos.

De esta forma $x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}>0$ y claramente $a_0^{2/3}<x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}$ implicándose que $\dfrac{1}{x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}}<\dfrac{1}{a_0^{2/3}}$.

Regresando a (II) tendremos que se cumple

$$\left|g(x)-g(a_0)\right|=\frac{\left|x-a_0\right|}{\left|x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}\right|}=\frac{\left|x-a_0\right|}{x^{2/3}+a_0^{2/3}+x^{1/3}a_0^{1/3}}\Rightarrow$$

$$\left|g(x)-g(a_0)\right|<\frac{\left|x-a_0\right|}{a_0^{2/3}}<\varepsilon_0\ldots\text{(III).}$$

Entonces construimos $\delta_2=\varepsilon_0 a_0^{2/3}$ y proponemos a $\delta_0=\text{mín}\left\{\delta_1,\delta_2\right\}=\text{mín}\left\{a_0,\varepsilon_0 a_0^{2/3}\right\}$.

Verifiquemos que δ_0 cumple con $\forall x$ si $\left|x-a_0\right|<\delta_0\Rightarrow\left|g(x)-g(a_0)\right|<\varepsilon_0$.

Tomemos un x_0 arbitrario que cumpla

$\left|x_0 - a_0\right| < \delta_0 = \text{mín}\left\{a_0, \varepsilon_0 a_0^{2/3}\right\} \Rightarrow \left|x_0 - a_0\right| < \delta_0 \leq \varepsilon_0 a_0^{2/3} \Rightarrow \dfrac{\left|x - a_0\right|}{a_0^{2/3}} < \varepsilon_0$ luego por (III) $\left|g(x_0) - g(a_0)\right| < \varepsilon_0$.

De esta manera, como x_0 es arbitraria, se cumple que $\forall x$ si $\left|x - a_0\right| < \delta_0 \Rightarrow \left|g(x) - g(a_0)\right| < \varepsilon_0$; por lo tanto, $\delta_0 = \text{mín}\left\{a_0, \varepsilon_0 a_0^{2/3}\right\}$ es el valor buscado.

Luego, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitrario, se cumple

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \ \ni \ \forall x \text{ si } \left|x - a_0\right| < \delta \Rightarrow \left|g(x) - g(a_0)\right| < \varepsilon,$$

de donde concluimos que g es continua en $a_0 > 0$ arbitrario y, precisamente por arbitrariedad de a_0, se concluye que g es continua en $a \ \ \forall a > 0$.

Demostración (b)

¿Qué significa que g sea continua en 0?

Que $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $\left|x - 0\right| < \delta \Rightarrow \left|g(x) - g(0)\right| < \varepsilon$ (definición 3.1.2).

De esta manera, tomemos $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y construyamos o propongamos un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $\left|x - 0\right| = \left|x\right| < \delta_0 \Rightarrow \left|g(x) - g(0)\right| < \varepsilon_0$.

Procediendo con la estimación de $\left|g(x) - g(0)\right| < \varepsilon_0$ se tiene que

$$\left|g(x) - g(0)\right| = \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}\right| = \left|\sqrt[3]{x}\right| = \left|x^{1/3}\right| \ldots \text{(IV)}.$$

Para construir la δ_0 hacemos $\left|x^{1/3}\right| < \varepsilon_0 \Rightarrow \left|x^{1/3}\right|^3 < \varepsilon_0^3 \Rightarrow \left|x\right| < \varepsilon_0^3$ y con esto tomamos a $\delta_0 = \varepsilon_0^3$.

Verifique el lector que $\forall x$ si $\left|x - 0\right| < \delta_0 \Rightarrow \left|g(x) - g(0)\right| < \varepsilon_0$.

Nosotros de aquí, concluimos ya, que para la $\varepsilon_0 > 0$ tomada inicialmente existe una $\delta_0 = \varepsilon_0^3$ tal que $\forall x$ si $\left|x - 0\right| < \delta_0 \Rightarrow \left|g(x) - g(0)\right| < \varepsilon_0$.

Regresando a nuestro problema, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitrario, entonces se cumple $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $\left|x - 0\right| < \delta \Rightarrow \left|g(x) - g(0)\right| < \varepsilon$, por lo tanto g es continua en 0.

Demostración (c)

Se deja al lector como ejercicio.
Sugerencia: la demostración es análoga a la del inciso (*a*).

EJERCICIOS

3.1.1 Pruebe que $f\left(x\right)=\sqrt{x-1}$ es continua en 1.

3.1.2 Pruebe $f\left(x\right)=x^2-9$ es continua en -3.

3.1.3 Pruebe que $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x\neq 2\\ 0 & \text{si} \quad x=2\end{cases}$ no es continua en 2 utilizando la definición con cuantificadores ε, δ.

3.1.4 Pruebe que $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si} \quad x\neq 2\\ 1 & \text{si} \quad x=2\end{cases}$ es continua en todos los reales excepto en 2.

Sección 3.2. Continuidad y sucesiones

En la sección anterior, para decidir si *f* era continua o no en *a*, se comparó $\lim_{x\to a} f(x)$ con $f(a)$; asimismo, se hicieron pruebas con cuantificadores. En la presente sección se utilizará un criterio discreto para saber acerca de la continuidad de la función *f* en el punto *a*, esto es, se hará uso de algunos resultados sobre sucesiones.

En términos de cuantificadores se tiene que f es continua en a si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esto significa que para un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario se construye un $\delta_0 > 0$ que cumple con $\forall x$ si $|x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$ y se concluye que *f* es continua en *a*.

Así también, la importancia del comportamiento de $\lim_{x\to a} f(x)$ es básica para decidir si la función *f* es continua en *a*, y por lo tanto debemos echar mano de toda la información sobre límites a nuestra disposición.

Ahora preguntamos, ¿qué más sabemos acerca de $\lim_{x\to a} f(x)$?

Tenemos el teorema 2.2.1, el cual nos dice que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si $\forall \{x_n\}$ con $x_n \neq a \ \ \forall n$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Si en el teorema mencionado ocurre que la función *f* es continua en *a*, se tendrá que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, tendrá $l = f(a)$ y se puede sustituir en el teorema a *l* por $f(a)$, esto es: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ si y sólo si

$$\forall \{x_n\} \text{ con } x_n \neq a \ \ \forall n \text{ con } \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Para este caso particular en que *f* es continua en *a*, ¿será necesaria la condición para la sucesión que pide $x_n \neq a \ \ \forall n$? No, puesto que en caso de tener algún término de la sucesión igual con *a* no existiría ningún problema en evaluar esos números en la función.

Recordemos que cuando estudiamos a $\lim_{x\to a} f(x) = l$, la función *f* no necesariamente estaba definida en *a*.

Teorema 3.2.1

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ si y sólo si } \forall \{x_n\} \text{ con } \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Las argumentaciones anteriores bastan para asegurar la veracidad del teorema, no obstante, si el lector desea demostrarlo por medio de la definición 3.1.1 (conocido como criterio $\varepsilon-\delta$), lo puede realizar de manera análoga a la demostración del teorema 2.2.1.

Veamos una aplicación del teorema 3.2.1.

Problema 3.2.1

Demostrar $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^5+1}{x^5+x^4} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 2 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$ no es continua en 0.

Solución

Si se intenta probar por el criterio $\varepsilon-\delta$, se tendría que encontrar un $\varepsilon_0>0$ que cumpliera $\forall\delta>0 \quad \exists \quad x \quad \ni \quad |x-0|<\delta$ pero $\left|\dfrac{x^5+1}{x^5+x^4}\right|\geq\varepsilon_0$.

En una primera inspección, ¿se le ocurre quién puede ser ese $\varepsilon_0>0$? No parece terea fácil.

Si utilizamos el teorema 3.2.1, ¿qué es lo que debemos hacer? Encontrar una sucesión $\{x_n\}$ que cumpla $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, pero que $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)\neq f\left(0\right)$, es decir $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)\neq 2$.

¿Qué sucesión? Podemos intentar con la sucesión más fácil, $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$

La sucesión $\{x_n\}$ converge a 0, esto cumple con la primera parte de lo que se quiere ver.

¿Se cumplirá $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)\neq 2$?

Veamos:

$$\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^5+1}{\left(\frac{1}{n}\right)^5+\left(\frac{1}{n}\right)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n^5}{n^5}}{\frac{1+n}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^5}{1+n}, \text{ pero como}$$

$\dfrac{1+n^5}{1+n}=n^4-n^3+n^2-n+1$ se concluye $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\infty$.

Esto nos dice que $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) \neq 2$, de esta manera concluimos que la sucesión buscada es $\left\{x_n\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ la cual converge a 0, pero cuya sucesión de imágenes no converge a $f\left(0\right) = 2$, por lo tanto *f* no es continua en 0.

Problema 3.2.2

Demuestre que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in I \end{cases}$ no es continua en a $\forall a \in \mathbb{R}$ (figura 1).

Solución

¿Qué significa que *f* no sea continua en a $\forall a \in \mathbb{R}$?

Que si seleccionamos a_0 arbitrario, entonces *f* no es continua en a_0.

¿Qué significa que *f* no es continua en a_0?

En términos del teorema 3.2.1, significa que

$$\exists\left\{x_n\right\} \text{ con } \lim_{n\to\infty} x_n = a_0 \text{ pero } \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) \neq f\left(a_0\right).$$

El problema consiste entonces en construir o proponer una sucesión $\left\{x_n\right\}$ que converja a a_0 que cumpla $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) \neq f\left(a_0\right)$.

¿Qué valor tiene $f\left(a_0\right)$? $f\left(a_0\right)$ puede valer 1 en caso de ser a_0 racional y 0 si a_0 es irracional, por lo tanto dividimos nuestro problema en dos casos: (I) $a_0 \in \mathbb{Q}$ (II) $a_0 \in I$.

(I) Si $a_0 \in \mathbb{Q}$, el problema entonces será encontrar una sucesión $\left\{x_n\right\}$ que cumpla $\lim_{n\to\infty} x_n = a_0$ pero $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) \neq f\left(a_0\right) = 1$.

Se sabe que por medio de números irracionales nos podemos aproximar a un número racional, por ejemplo, la sucesión $\left\{\frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ es una sucesión de irracionales y converge a 0, el cual es racional.

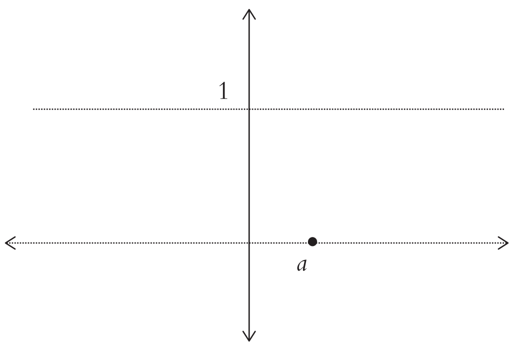
Si logramos construir una sucesión $\left\{x_n\right\}$ donde todos sus términos sean irracionales, la cual converja a a_0, se tendrá que $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq 1 = f\left(a_0\right)$ y con esto quedaría el problema resuelto. ¿Cómo construir esta sucesión?

Sabemos que $\frac{\sqrt{2}}{n} \in I \quad \forall n$, y afirmamos que $a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} \in I \quad \forall n$ (pruébelo por el método de contradicción), de esta forma proponemos a $\{x_n\} = \left\{a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ como la sucesión buscada.

Se observa primero que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n} = a_0$, luego, como segundo tenemos $f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0 \quad \forall n$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \neq f(a_0) = 1.$$

Figura 1



Lo anterior nos dice que $\{x_n\} = \left\{a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ es, efectivamente, la sucesión buscada.

(II) Si $a_0 \in I$. En el caso anterior, cuando $a_0 \in \mathbb{Q}$, la sucesión que construimos fue de números irracionales, ahora podemos pensar que una sucesión que nos puede servir es una que tenga todos sus términos racionales, y para la cual se cumpla $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_0$ pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq f(a_0) = 0$.

¿Cómo construir una sucesión de racionales que converja a a_0 irracional?

Recordemos que a_0 puede escribirse en términos de una expansión decimal infinita no periódica $a_0 = a.a_1a_2a_3\ldots a_k\ldots$

Ahora, construimos la sucesión de racionales

$x_1 = a.a_1\overline{0}$, $x_2 = a.a_1a_2\overline{0}$, $x_3 = a.a_1a_2a_3\overline{0}$, $x_4 = a.a_1a_2a_3a_4\overline{0}$, con periodo 0

$x_n = a_1a_2\ldots a_n\overline{0}$ es un racional con periodo 0, a partir del $n+1$ decimal. Así también, notamos que x_1 está cerca de a_0, pero x_2 está más cerca (dos decimales), x_3 estará más cerca (tres decimales), x_{100} estará muy próximo a a_0 (cien decimales) x_n se parecerá a a_0 en n decimales).

No es difícil concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_0$.

Ahora tenemos que $f(x_n) = 1 \quad \forall n$, puesto que $x_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n$, de esta forma $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(a_0)$.

Esto nos dice que $\{x_n\} = \{a.a_1a_2a_3\ldots a_n\overline{0}\}$ es la sucesión buscada.

Resumiendo, tenemos que, tanto en (I) como en (II), existe una sucesión $\{x_n\}$ que converge a a_0 pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a_0)$, por lo tanto, *f* no es continua en a_0.

Finalmente, como a_0 es arbitrario, se cumplirá que *f* no es continua en $a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Problema 3.2.3

Sea $f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{si} \quad x = p/q \in \mathbb{Q} \quad q > 0 \quad (p,q) = 1 \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \in I \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

$(p,q) = 1$, significa que p y q son primos relativos, es decir, que su máximo común divisor es 1.

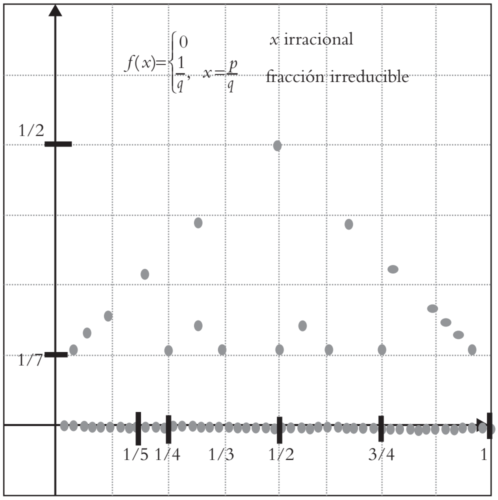
(a) Demostrar que *f* es continua que $a \quad \forall a \in (0,1) \cap I$.

(b) Demostrar que *f* no es continua que $a \quad \forall a \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Solución

Al dibujar algunos elementos de la gráfica de *f*, parece que la función no es continua en ningún número, pero eso es una simple percepción (figura 2).

Figura 2



Demostración (a)

¿Qué significa demostrar que *f* es continua en $a \;\; \forall a \in (0,1) \cap I$?

Que si tomamos a $a_0 \in (0,1) \cap I$ arbitrario, entonces *f* es continua, en a_0.

¿Qué significa que *f* es continua en a_0?

Que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\ni\; \forall x$ que cumple $|x - a_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon$.

Tomemos entonces un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y construyamos o propongamos un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $|x - a_0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a_0)| < \varepsilon_0$.

Procediendo con la estimación de $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$ se tiene

$|f(x) - f(a_0)| = |f(x)| < \varepsilon_0$, puesto que $f(a_0) = 0$.

Notemos que si $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, entonces $|f(x)| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left|\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} < \varepsilon_0$.

Se sabe que para $\varepsilon_0 > 0$ siempre existe un $q_0 \in \mathbb{Z}^+$ mínimo tal que $\frac{1}{q_0} < \varepsilon_0$, entonces siempre se tendrá $\frac{1}{q} < \varepsilon_0 \;\; \forall q \geq q_0$.

Ahora construimos el conjunto $A = \left\{ \frac{p}{q} \middle| q < q_0 \right\} \subset (0,1)$ (observe que el conjunto A es finito). Lo anterior nos da la idea de que nuestra δ_0 buscada debe ser tal que el intervalo $(a_0 - \delta_0, a_0 + \delta_0)$ no tenga ningún elemento del conjunto A.

De esta forma proponemos a δ_0 como la mínima distancia entre a_0 y cada uno de los elementos de A, por lo tanto el intervalo $\left(a_0-\delta_0, a_0+\delta_0\right)$ no tendrá ningún elemento del conjunto A.

En estas condiciones, para nuestra $\varepsilon_0>0$ arbitraria

$$\exists \quad \delta_0>0 \ \ni \ \forall x \text{ cumple } \left|x-a_0\right|<\delta_0 \Rightarrow \left|f(x)-f(a_0)\right|<\varepsilon_0 .$$

Note que este valor de δ_0 funciona para cualquier x irracional, ya que en ese caso $\left|f(x)-f(a_0)\right|=|0-0|<\varepsilon_0$, y también funciona en el caso en que x sea racional, porque se tendrá $x=\dfrac{p}{q} \in(0,1)$, pero no es elemento de A, lo que significa que $q \geq q_0$, por lo tanto $\left|f\left(x\right)-f\left(a_0\right)\right|=\left|\dfrac{1}{q}\right|=\dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{q_0}<\varepsilon_0$.

Por arbitrariedad de ε_0 se tiene que

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta>0 \ \ni \forall x \text{ que cumple con } |x-a|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f(a_0)\right|<\varepsilon,$$

de esta forma, f es continua en a_0; finalmente, como $a_0 \in(0,1) \cap I$ es arbitraria, se cumplirá que f es continua en $a \ \ \forall a \in(0,1) \cap I$.

Solución (b)

¿Qué significa demostrar que f sea discontinua en $a \ \ \forall a \in(0,1) \cap \mathbb{Q}$?

Que si tomamos un $a_0 \in(0,1) \cap \mathbb{Q}$ arbitrario, entonces f no es continua en a_0.

¿Qué significa que f no sea continua en a_0, en términos del teorema 3.2.1?

Que $\exists\left\{x_n\right\}$ con $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n=a_0$ pero $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} f\left(x_n\right) \neq f\left(a_0\right)$,
es decir, debemos encontrar una sucesión que converja hacia a_0, pero cuya sucesión de imágenes no converja a $f\left(a_0\right)$.

Como $a_0 \in \mathbb{Q}$ (entre 0 y 1), a_0 se puede escribir como $\dfrac{p_0}{q_0}$ con $(p_0, q_0)=1$ y de esta manera $f(a_0)=f\left(\dfrac{p_0}{q_0}\right)=\dfrac{1}{q_0} \neq 0$.

Nótese que podemos construir una sucesión de irracionales que converja a a_0 (ver problema 3.2.2) ¿Qué sucesión?

La sucesión $\left\{a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\} = \left\{\frac{p_0}{q_0} + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ es una sucesión de irracionales que converge a $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$.Veamos qué pasa con la sucesión de imágenes.

$$\{f(x_n)\} = \left\{f\left(a_0 + \sqrt{2}\right), f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \ldots f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \ldots\right\}$$

$$= \{0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$$

(sucesión constante 0).

Se tiene que $\left\{a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ converge a a_0 y que $\left\{f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right)\right\}$ converge a 0; esto es $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = a_0$ con $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0 \neq \frac{1}{q_0} = f(a_0)$, por lo tanto la sucesión buscada es $\left\{a_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$, lo cual nos dice que *f* es discontinua en $a_0 \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Como a_0 es arbitrario, se concluye que *f* no es continua en $a \quad \forall a \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Esta extraordinaria función rompe con la idea intuitiva que se tiene acerca de la gráfica de una función continua. Si bien es cierto que una curva que se traza sin despegar el lápiz puede corresponder a una función continua, no siempre una función continua será dibujable de acuerdo con la idea anterior.

Problema 3.2.4

Sea *f* tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ con *f* continua en 0.

(a) Demostrar que $f(0) = 0$.
(b) Demostrar que $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
(c) Demostrar que *f* es continua en $a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Solución (a)

¿Cómo demostrar que $f(0) = 0$?

Observe que $\forall x$ se cumple $x+0=x$, luego $f(x+0)=f(x)$, por hipótesis $f(x+0)=f(x)+f(0)$, de donde se tiene que $f(x)+f(0)=f(x)$, obteniendo de esta manera que $f(0)=0$.

Solución (b)

¿Qué significa que $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x$?

Que si tomamos un x_0 arbitrario se debe cumplir que $f(-x_0)=-f(x_0)$ ¿Cómo demostrar esto último? Utilizando la información de (a):

Sabemos que $0=x_0-x_0=x_0+(-x_0)$, esto nos dice que $f(0)=f\left(x_0+\left(-x_0\right)\right)$; por (a) se tiene que $f(0)=0$ y por hipótesis $f(x_0+(-x_0))=f(x_0)+f(-x_0)$, por lo tanto $0=f(x_0)+f(-x_0)$ lo cual implica $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$, que es lo que se quería demostrar.

Finalmente, como x_0 es arbitraria, se tendrá que $f(-x)=-f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Solución (c)

¿Qué significa que *f* es continua en $a\ \ \forall a$?

Que si seleccionamos a_0 arbitrario, entonces *f* es continua en a_0.

¿Qué significa que *f* sea continua en a_0?

En términos del teorema 3.2.1, significa que

$\forall\left\{x_n\right\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a_0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(a_0\right)$.

De esta manera, el problema es tomar una sucesión $\left\{x_n\right\}$ arbitraria que cumpla con $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a_0$ y a partir de esto concluir que $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(a_0\right)$.

Primero se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a_0$, significa que x_n está cerca de a_0 cuando es *n* es grande, es decir, la distancia entre x_n y a_0 se va "reduciendo" conforme *n* crece, de tal manera que podemos asegurar que la sucesión $\left\{x_n-a_0\right\}=\left\{y_n\right\}$ se aproxima a 0 cuando *n* es grande. Esto lo escribiremos como $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-a_0\right)=0$.

Por hipótesis tenemos que *f* es continua en 0, lo cual significa en términos del teorema 3.2.1 que $\forall\left\{x_n\right\}$ con $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=f\left(0\right)$.

De esta manera, para nuestra sucesión particular $\left\{x_n-a_0\right\}=\left\{y_n\right\}$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f\left(y_n\right)=f\left(0\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_n-a_0\right)=0\ldots$(I).

Por hipótesis $f\left(x_n - a_n\right) = f\left(x_n + \left(-a_0\right)\right) = f\left(x_n\right) + f\left(-a_0\right)$ y por (b) tenemos que $f(-a_0) = -f(a_0)$; regresando a (I) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n - a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(x_n\right) - f\left(a_0\right)\right] = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) - \lim_{n\to\infty} f\left(a\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = f\left(a_0\right),$$

que es lo que se quería demostrar.

Así, como $f\left(a_0\right)$ es arbitraria, concluimos que

$$\forall\left\{x_n\right\} \text{ con } \lim_{n\to\infty} x_n = a_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = f\left(a_0\right),$$

por lo tanto f es continua en a_0.

Finalmente, como a_0 es arbitrario, se cumple f es continua en $a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

EJERCICIOS

3.2.1 Demuestre que $h(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ es continua en 0.

3.2.2 (a) Demuestre que $g(x) = x^2 + x$ es continua en 3.

(b) Demuestre que g es continua en $a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

3.2.3 Demuestre $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ no es continua en 0.

3.2.4 Demuestre que $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^3+1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$ no es continua en -1.

3.2.5 Dé un ejemplo de una función f que sea discontinua en $a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, pero que $|f|$ sea continua en $a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Sección 3.3. Operaciones con funciones continuas

En esta sección obtendremos resultados que, de alguna manera, son esperados entre funciones continuas con las operaciones de suma, producto, cociente y composición. Las ideas de las que se desprenden los resultados son familiares al lector y las demostraciones de los resultados no son difíciles.

(1) Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, estas funciones son continuas en 2, aún más, son continuas en cualquier número real.

Como f y g son continuas en 2, se tiene que $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4 = f(2)$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} 3x = 6 = g(2)$.

La función $f + g$ es $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x$ y nosotros nos preguntamos: ¿es continua $f + g$ en 2? Veamos $(f + g)(2) = 4 + 6 = 10$ y $\lim_{x\to 2}(f + g)(x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x = 4 + 6 = (f + g)(2)$, es decir,
$\lim_{x\to 2}(f + g)(x) = (f + g)(2)$, lo cual nos dice que $f + g$ es continua en 2 (figura 1).

Figura 1

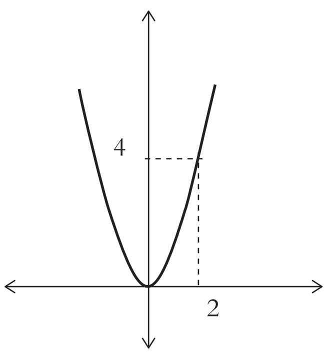
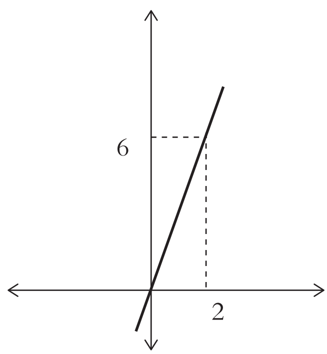


Figura 2



(2) Se sabe que la función $l(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ no es continua en 0 y también sabemos que $m(x) = \frac{x}{2}$ es continua en 0, ahora nos preguntamos: ¿ $l + m$ es continua en 0? Observemos primeramente quién es $l + m$:

$$(l+m)=l(x)+m(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ \quad 2 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

Ahora $\lim\limits_{x\to 0}(l+m)(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}\right)$ no existe, esto nos dice que $l+m$ no es continua en 0.

En (1) obtuvimos que la suma de las funciones continuas en 2, es continua en 2 y, el hecho de tener una función discontinua en el número de análisis, evita que la suma sea continua en dicho valor, veamos que la situación (1) se cumple en general.

Teorema 3.3.1

Si f y g son funciones continuas en $a \Rightarrow f+g$ es continua en a.

Demostración

¿Qué significa que $f+g$ es continua en a?

Que $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=(f+g)(a)$.

¿Qué nos dicen las hipótesis?

Que f y g son continuas en a.

¿Qué significa esto? Que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)\ldots$(I) y $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)\ldots$(II).

Sumando (I) y (II) tenemos que

$\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)\ldots$(III), por el teorema 2.3.1 se tiene que $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$, regresando a (III) se tiene que $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=(f+g)(a)$, por lo tanto $f+g$ es continua en a.

Con este teorema se asegura, por ejemplo, que la función $f(x)=x^2+x$, es una función continua en 8, puesto que $l(x)=x^2$ y $p(x)=x$ son continuas en 8.

Ahora, ¿se puede pensar en un teorema como el anterior para el producto de funciones continuas? Veamos.

$h(x)=2x$ y $l(x)=x-1$ son funciones continuas en 3. ¿Es continua la función hl en 3?

$(hl)(x) = h(x)l(x) = 2x(x-1) = 2x^2 - 2x$ y $\lim_{x\to 3}(hl)(x) = \lim_{x\to 3}(2x^2 - 2x) = 12$, y como $(hl)(3) = 12$, se tiene que $\lim_{x\to 3}(hl)(x) = (hl)(3)$, por lo tanto, la función producto hl es continua en 3.

Teorema 3.3.2

Si f y g son funciones continuas en $a \Rightarrow fg$ es continua en a.

Demostración

¿Qué significa que fg es continua en a?

Que $\lim_{x\to a}(fg)(x) = (fg)(a)$.

Por hipótesis se tiene que

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$....(I) y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$...(II) por ser f y g continuas en a.

Multiplicando (I) y (II) se tiene $\lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = f(a)g(a)$...(III).

Luego, por el teorema 2.3.2, se tiene que $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$, regresando a (III) se tiene que $\lim_{x\to a}(fg)(x) = f(a)g(a) = (fg)(a)$, por lo tanto fg es continua en a.

Ahora, ¿el cociente de funcione continuas en a será continua en a?

Si $f(x) = 3$, función contante 3 y $l(x) = x^2$ ambas son funciones continuas en 0.

¿Es $\dfrac{f}{l}$ continua en 0?

Observe que $\left(\dfrac{f}{l}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{l(x)} = \dfrac{3}{x^2}$ es una función que no es continua en 0. Ahora, f y l son continuas en 2, ¿qué puede decir de la continuidad de $\dfrac{f}{l}$ en 2?

$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{f}{l}\right)(x) = \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{l(x)} = \lim_{x\to 2}\dfrac{3}{x^2} = \dfrac{3}{4}$ y además $\left(\dfrac{f}{l}\right)(2) = \dfrac{3}{4}$, esto nos dice que $\dfrac{f}{l}$ es continua en 2.

Observemos que $\lim\limits_{x\to 0} l(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 = l(0)$, note que no se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f}{l}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} l(x)}$...(I) y, en cambio, si se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{f}{l}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} l(x)} = \frac{3}{4}$...(II), una cuestión fundamental por la cual no se puede concluir (I) es que $\lim\limits_{x\to 0} l(x) = 0$.

Generalizando, diremos que para que $\left(\frac{f}{l}\right)$ pueda ser continua en a, se debe tener $\lim\limits_{x\to a} l(x) = l(a) \neq 0$.

Teorema 3.3.3

Sean f y g funciones continuas en a con $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ es continua en a.

Demostración

¿Qué significa que $\frac{f}{g}$ sea continua en a?

Que $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$.

De los supuestos se tiene

(I) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ por ser f continua en a.

(II) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. por ser g continua en a.

Dividiendo las expresiones de (I) sobre (II), se tiene que

(III) $\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$. Por el teorema 2.3.3, tenemos que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, regresando a (III), obtenemos $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$, pero como $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}$, concluimos que $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Ahora, con respecto a la composición de funciones se podría pensar de manera errónea que si *f* y *g* son continuas en *a*, entonces $f \circ g$ es continua en *a* ¿por qué esto es equivocado? Citemos un ejemplo donde no sea cierta la anterior afirmación.

(3) Sean $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ y $g(x) = x^2$; ambas funciones son continuas en $\sqrt{2}$ (ver figura 3 y 4).

Figura 3

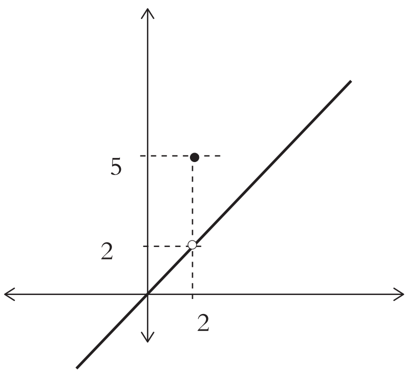
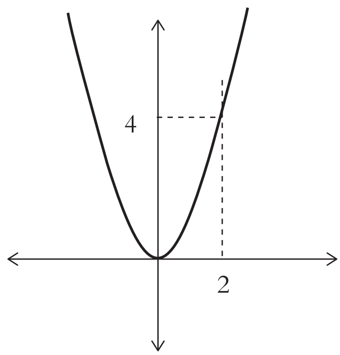


Figura 4



(No pierda de vista que *f* es discontinua en 2)

Ahora observe que $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(g(x)) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x^2)^{\star}$

note que $x^2 \neq 2$ puesto que $x \neq \sqrt{2}$, por lo tanto $f(x^2) = x^2$. Regresando a $\star$ se tiene que $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} x^2 = 2$, por otro lado tenemos que $(f \circ g)(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f(2) = 5$, de donde se concluye que $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (f \circ g)(x) \neq (f \circ g)(\sqrt{2})$, es decir, $f \circ g$ no es continua en $\sqrt{2}$ a pesar de que *f* y *g* son continuas en $\sqrt{2}$.

¿Cuáles son entonces las condiciones para *f* y *g* para tener a $f \circ g$ continua en *a*?

(4) Para que $f \circ g$ sea continua en *a* se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(a)$.

Observe que no es de mucho interés el hecho de que f sea continua en a, puesto que nunca se estima f en a, pero lo que sí parece importante es que f esté definida en $g(a)$.

Revisemos la siguiente situación:

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, note que f no está definida en 0 y que g sí es continua en 0.

¿Quién es $(f\circ g)(x)$?

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}}$ ¿$f\circ g$ está definida en 0? Sí.

$(f\circ g)(0)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{0-1}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{-1}}=-1$. Observe que f si está definida en $g(0)=-1$ y además, g es continua en 0.

¿$f\circ g$ es continua en 0?

$\lim\limits_{x\to 0}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to 0}f\big(g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}}=-1$ donde $(f\circ g)(0)=-1$, lo que significa que $(f\circ g)(x)$ sí es continua en 0.

Comparemos las situaciones (3) y (4):

(3) f y g son continuas en a, f no es continua en $g(a)$ y obtenemos que $f\circ g$ no es continua en a.

(4) g es continua en a y f continua en $g(a)$, obtenemos como resultado, que $f\circ g$ es continua en a.

Demostremos que la situación de (4), se cumple en general.

Teorema 3.3.4

Sean f y g funciones, con g continua en a y f continua en $g(a)\Rightarrow f\circ g$ es continua en a.

Demostración

¿Qué significa que $f \circ g$ sea continua en *a*?

Que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $|x - a| < \delta \Rightarrow |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon$ (definición 3.1.2).

El problema consiste entonces en tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y con esto construir un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $|x - a| < \delta_0 \Rightarrow |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon_{.0}$.

Como *f* es continua en $g(a)$ (por hipótesis), se cumple $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall y$ si $|y - g(a)| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$.

En particular, para nuestra $\varepsilon_0 > 0$ seleccionada inicialmente, $\exists \delta_1 > 0 \ \ni \ \forall y$ si $|y - g(a)| < \delta_1 \ldots (I) \Rightarrow |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon_0 \ldots$(II).

Así también, como *g* es continua en *a* (por hipótesis), se cumplirá que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x \ |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$.

Esto nos dice que, en particular para nuestra

$\delta_1 > 0 \ \exists \ \delta_2 > 0 \ \ni \ \forall x$ si $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1$.

Observe que los valores $g(x)$ que provienen de $|x - a| < \delta_2$ cumplen con la desigualdad (I) (los $g(x)$ se comportan como los *y*), lo cual implica que se cumple la desigualdad (II), que dice $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon_0$.

Escrito de otra manera, se tiene que $\forall x$ si $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_1$, y por (I) se implica (II), esto es $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| = |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon_0$.

¿Quién es δ_0 buscada? La δ_0 buscada es $\delta_0 = \delta_2$.

Como la $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se cumple que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \ni \ \forall x$ si $|x - a| < \delta \Rightarrow |(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon$ de donde, finalmente, $f \circ g$ es continua en *a*.

Ahora preguntamos: ¿$h(x) = \operatorname{sen} x^2$ es continua en 0?
h puede ser vista como una composición de funciones, $f(y) = \operatorname{sen} y$ y $g(x) = x^2$, puesto que $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = senx^2$.

Se sabe que *g* es continua en 0 y *f* es continua en $g(0) = 0$ y por el teorema anterior, se tiene que $f \circ g$ es continua en 0, así *h* es continua en 0.

Si deseáramos calcular $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{x^2 + x}$, nos gustaría, y de hecho ocurre para este límite en particular, que $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 8} \left(x^2 + x\right)} = \sqrt{64 + 8} = \sqrt{72}$.

Note que $\sqrt{x^2+x}$ puede verse como $(f\circ g)(x)=\sqrt{x^2+x}$ donde $f(y)=\sqrt{y}$ y $g(x)=x^2+x$, como g es continua en 8 y f es continua en $g(8)=72$, se tendrá que $f\circ g$ es continua en 8, es decir, $\lim\limits_{x\to 8}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(8)$.

Con este resultado tendremos un criterio para realizar $\lim\limits_{x\to a} f\left(g(x)\right)= f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$ donde $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe y la función f es continua en dicho límite.

De lo anterior se puede intuir que $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x^3=\cos\left(\lim\limits_{x\to\pi}x^3\right)=\cos\pi^3$ puesto que el coseno es una función continua en π^3.

Teorema 3.3.5

Supongamos $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ y f una función continua en l entonces $\lim\limits_{x\to a} f\left(g(x)\right)= f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$.

Demostración

Para demostrar el problema tomamos la sugerencia de Spivak (Apostol, 1988, capítulo 6) que nos pide considerar a la función $G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x\neq a \\ l & \text{si} \quad x=a\end{cases}$

Observe que $\lim\limits_{x\to a} G(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$, pero como $l=G(a)$, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} G(x)=G(a)$, lo que significa que G es continua en a.

Como G es continua en a y f es continua en $l=g(a)$ se tiene, por el teorema 3.3.4, que $f\circ G$ es continua a, por lo tanto se cumple $\lim\limits_{x\to a}(f\circ G)(x)=(f\circ G)(a)$; luego por un lado $\lim\limits_{x\to a}(f\circ G)(x)=\lim\limits_{x\to a} f\left(G(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f\left(g(x)\right)$ y por otro lado $(f\circ G)(a)=f\left(G(a)\right)=f(l)=f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$.

Finalmente, $\lim\limits_{x\to a} f\left(g(x)\right)= f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$, concluyendo así la demostración.

Problema 3.3.1

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

Solución

A la función $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$ se le puede ver como la composición de una función $f(y) = \sqrt{y}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, esto es

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$.

Se sabe que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$ y que $f(y)$ es continua en 4, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\lim\limits_{x\to 2} g\left(x\right)\right)$, es decir, $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt{4} = 2$.

El resultado del teorema 3.3.5 establece que $\lim\limits_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)\right)$ siempre que *f* sea continua en *l* con $\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right) = l$.

Si f no es continua en *l*, con $\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right) = l$, ¿se cumplirá $\lim\limits_{x\to a} f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)\right)$? La respuesta es no; veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f(y) = \begin{cases} y+1 & \text{si} \quad y \neq 1 \\ 5 & \text{si} \quad y = 1 \end{cases}$ y $g(x) = \dfrac{x}{5}$, para la función *g* se tiene que $\lim\limits_{x\to 5} g\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{5} = 1$, también tenemos que $\lim\limits_{x\to 5} f\left(g\left(x\right)\right) = \lim\limits_{x\to 5} f\left(\dfrac{x}{5}\right) = \lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{5}+1\right) = 2$, por otro lado, $f\left(\lim\limits_{x\to 5} g\left(x\right)\right) = f\left(1\right) = 5$, por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 5} f\left(g\left(x\right)\right) \neq f\left(\lim\limits_{x\to 5} g\left(x\right)\right)$.

Problema 3.3.2

Si $\left|f(x)\right| \leq \left|x\right| \quad \forall x \Rightarrow f$ es continua en 0.

Solución

¿Qué significa que *f* es continua en 0?

Que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\; \ni \;\; \forall x$ si $\left|x-0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x)-f(0)\right| < \varepsilon$. El problema es entonces tomar un $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario y con esto construir un $\delta_0 > 0$ que cumpla $\forall x$ si $\left|x-0\right| < \delta_0 \Rightarrow \left|f(x)-f(0)\right| < \varepsilon_0$.

¿Cuánto vale $f(0)$?

Por hipótesis $|f(x)| \leq |x| \quad \forall x$, en particular si $x = 0$ se tendrá $0 \leq |f(0)| \leq |0| = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Ahora estimando $|f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$:

$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)|$ y como de las hipótesis se tiene que $|f(x)| \leq |x|$; se hace $|x| < \varepsilon_0$, por lo tanto se propone que $\delta_0 = \varepsilon_0$.

Veamos que se cumple que $\forall x$ si $|x - 0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$: tomemos un x_0 arbitrario que cumpla $|x_0 - 0| = |x_0| < \delta_0$ y probemos que se cumple $|f(x_0)| \leq |x_0| < \varepsilon_0$.

Como $|x_0 - 0| = |x_0| < \delta_0$ y $|f(x_0)| \leq |x_0| \Rightarrow |f(x_0)| < \delta_0 = \varepsilon_0$ pero como $|f(x_0)| = |f(x_0) - 0| = |f(x_0) - f(0)|$, se concluye $|f(x_0) - f(0)| < \varepsilon_0$.

Ahora, como x_0 es arbitrario, se cumplirá que $\forall x$ si $|x - 0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon_0$, de esta manera la $\delta_0 = \varepsilon_0$.

Así también, como $\varepsilon_0 > 0$ es arbitraria, se cumplirá que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0 \;\; \ni \;\; \forall x$ si $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$, lo cual significa que *f* es continua en 0.

EJERCICIOS

3.3.1 ¿Si $f + g$ es continua en $a \Rightarrow f$ y g son continuas en *a*?

3.3.2 ¿Si *f* y *g* son continuas en $a \Rightarrow \dfrac{1}{f+g}$ es continua en *a*?

3.3.3 Si *f* y *g* cumplen con $|f(x)| \leq |g(x)| \;\; \forall x,\;\; g(0) = 0$ y g continua en $0 \Rightarrow f$ es continua en 0.

3.3.4 Demuestre utilizando el teorema 3.3.2, que si *f* es continua en $a \Rightarrow Kf$ es continua en *a* para cualquier *a* real y *K* constante.

3.3.5 Utilizando el teorema 3.3.5, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{\pi}} \sqrt[3]{\cos x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \cos\sqrt{x^2 + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi^2} \operatorname{sen}\sqrt{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$

3.3.6 (a) Demuestre que $\forall n \;\; f(x) = x^n$ es continua en $a \;\; \forall a \in \mathbb{R}$.
(b) Demuestre que un polinomio de grado *k* con coeficientes reales es una función continua en $a \;\; \forall a \in \mathbb{R}$.
3.3.7 Si *f* es continua en *a* y $f(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ni f$ es positiva en $(a-\delta, a+\delta)$. Así también, si *f* es continua en *a* y $f(a) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ni f$ es negativa en $(a-\delta, a+\delta)$. Se dice que *f* es positiva (negativa) en *A*, si $f(x) > 0 \;\; (f(x) < 0) \;\; \forall x \in A$.

Sección 3.4. Continuidad y límites laterales

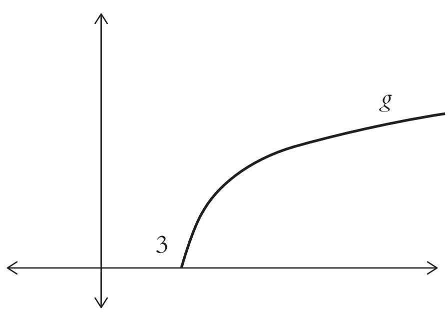
Como se mencionó en el capítulo anterior, la parte central de la continuidad de una función *f* en un número *a* es el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, de esta manera, dada nuestra primera definición de continuidad, la cual se desprendió de la argumentación básicamente geométrica, obtenemos más información acerca de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, consiguiendo una definición en términos de cuantificadores (definición 3.1.2) y un teorema (teorema 3.2.1), en el cual las sucesiones son una importante herramienta para el análisis de la continuidad de *f* en *a*.

En esta sección los límites laterales nos darán información acerca de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y, en la parte final, nos ayudarán a definir el concepto de función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$.

(1) Para la función $g(x) = \sqrt{x-3}$ (figura 1), se tiene $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = \lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x-3} = 0$ y $g(3) = \sqrt{3-3} = 0$, es decir, la función *g* es continua en 3.

Se observa también que para esta función la expresión $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x-3}$ carece de sentido, como consecuencia de no estar *g* definida para números a la izquierda de 3, ya que $Dg = [3, \infty)$.

Figura 1

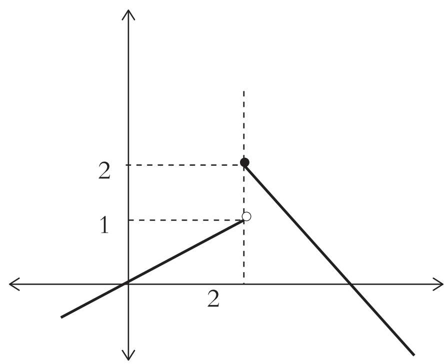


Por último, notamos que $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = g(3)$.

(2) Para la función $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < 2 \\ -x+4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$, (figura 2),

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (-x+4) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{2} = 1$; en este ejemplo se tiene que los límites laterales son diferentes, por lo tanto el límite de la función en $x = 2$ no existe, lo que nos dice que la función h no es continua en 2.

Figura 2



(3) Sea $p(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad x \neq 1,-1 \\ \frac{3}{2} & \text{si} \quad x = 1,-1 \end{cases}$ (figura 3).

Para la función p se tiene que $\lim\limits_{x\to -1^+} p(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0$ y $p(-1) = \frac{3}{2}$, es decir, $\lim\limits_{x\to -1^+} p(x) \neq p(-1)$; asimismo, se tiene que $\lim\limits_{x\to 1^-} p(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$ y $p(1) = \frac{3}{2}$, es decir $\lim\limits_{x\to 1^-} p(x) \neq p(1)$.

(4) Para la función f, como en la figura 4a, se tiene que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ es una situación como la mostrada en (1) y en (2). En la figura 4b se tiene $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$, la cual es una situación como la mostrada en (3).

Definamos el comportamiento que se exhibe en (1) y (2), como en la figura 4a.

DEFINICIÓN 3.4.1:

Si una función f cumple con $\lim\limits_{x\to a^+} f\left(x\right) = f\left(a\right)$, diremos que f es continua por la derecha en a.

Figura 3

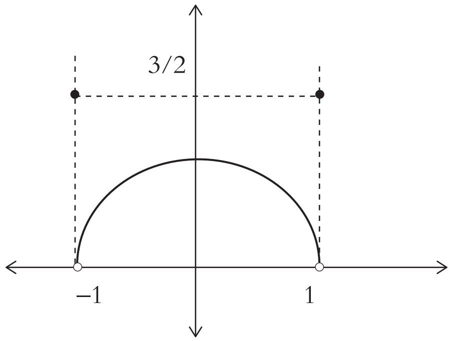


Figura 4a

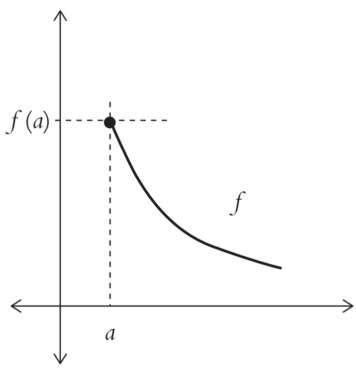
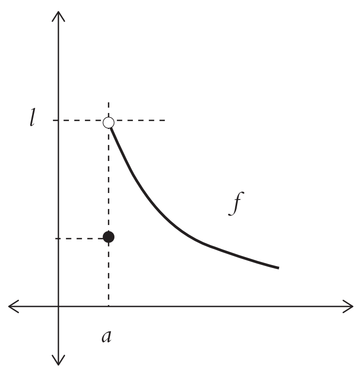


Figura 4b



¿Se puede pensar en continuidad por la izquierda? Sí, observe la figura 5.

DEFINICIÓN 3.4.2:

Si una función f cumple con $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right) = f\left(a\right)$, diremos que f es continua por la izquierda a.

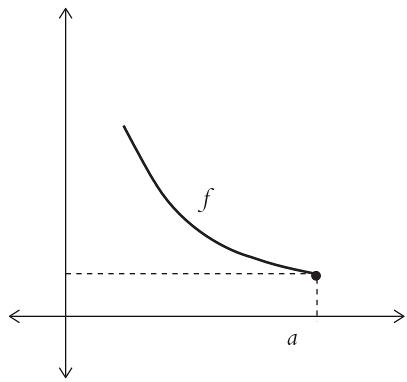
Ahora, de la figura 6 podemos decir que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \ldots$(I).

Y de la afirmación 2.4.1 se sabe que:

Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(a) = l \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$,

es fácil concluir de este resultado y de la igualdad (I), que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, que *f* es continua en *a*.

Figura 5



Afirmación 3.4.1

Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, entonces *f* es continua en *a*.

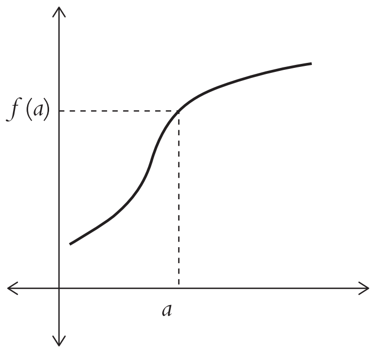
Demostración

La demostración de esta afirmación se describió en los reglones anteriores a la afirmación.

Así también, se tiene que si los límites laterales son distintos, entonces una función no es continua en el número en cuestión.

Si $a \in Df$ y tenemos $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)$ no existe (problema 2.4.1) $\Rightarrow f$ no es continua en *a*. Asimismo, si *f* no es continua por la derecha o por la izquierda en *a*, entonces también se tiene que *f* no será continua en ese punto.

Figura 6



Afirmación 3.4.2

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ con $a \in Df \Rightarrow f$ no es continua en *a*.

Demostración

Se deja al lector como ejercicio.

Afirmación 3.4.3

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$ o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$, entonces *f* no es continua en *a*

Demostración

Se deja al lector como ejercicio.

Las tres afirmaciones anteriores, nos dan un criterio para decidir cuándo una función es continua o no en un número, por medio de los límites laterales.

Problema 3.4.1

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ decir si *f* es continua o no en 2.

Solución

Utilicemos los límites laterales (figura 7).

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x}{2} = 1$ y $f(2) = \dfrac{2}{2} = 1$, de la afirmación 3.4.1, se concluye que *f* es continua en 2.

Figura 7

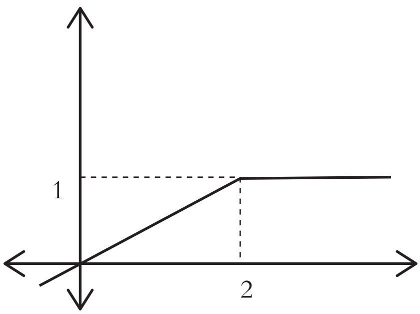
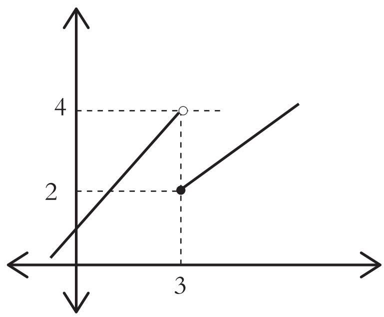


Figura 8



Problema 3.4.2

Sea $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{2x}{3} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$ demuestre que *g* no es continua en 3 (figura 8).

Solución

La gráfica de *g* nos dice que ésta no es continua en 3; veamos sus límites laterales.

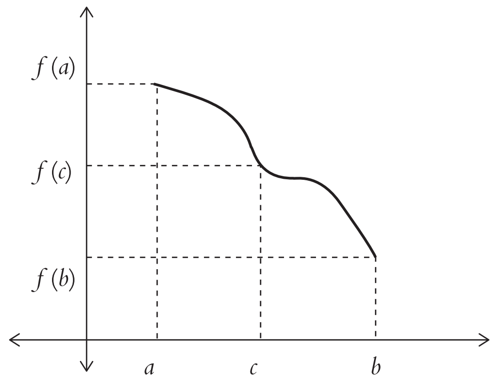
Como $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} x + 1 = 4$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{3} = 2$, por la afirmación 3.4.2 se concluye que *g* no es continua en 3.

En esta parte de la sección, definiremos el concepto de continuidad para un intervalo cerrado.

La gráfica de una función *f* como en la figura 9, representa una función continua en un número *c*, aún más, se pude decir, de la situación geométrica, que la función *f* es continua en todos los números del intervalo (a, b) y no se observan "rompimientos" en los extremos.

Podemos decir, para esta situación, que la función no sufre ningún "rompimiento" en todo $[a,b]$.

Figura 9



DEFINICIÓN 3.4.3

La función f es continua en (a,b), si es continua en $x \quad \forall x \in (a,b)$.

DEFINICIÓN 3.4.4

La función f es continua en $[a,b]$ si:

(i) f es continua en (a,b).
(ii) f es continua por la derecha en a, es decir $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
(iii) f es continua por la izquierda en b, es decir $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Problema 3.4.3

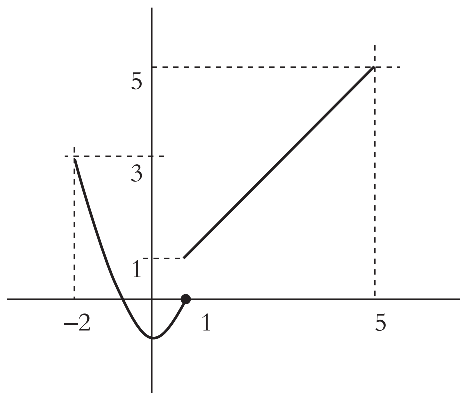
Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \in [-2,1] \\ x & \text{si} \quad x \in (1,5] \end{cases}$, decir en qué intervalos es f continua (figura 10).

Solución

(I) Primero veamos si f es continua o no en $[-2,1]$. Si los tres incisos de la definición 3.4.4 se cumplen para f en el intervalo $[-2,1]$, se tendrá que f será continua en

$[-2,1]$ o, si por lo menos uno no se cumple, entonces *f* no será continua en $[-2,1]$. De la gráfica, se observa que *f* es continua en $[-2,1]$, pero veamos que, efectivamente, se cumplen los tres incisos.

Figura 10



(i) Sea $x_0 \in (-2,1)$ arbitrario, veamos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x^2 - 1 = x_0^2 - 1 = f(x_0)$, esto significa que *f* es continua en x_0; como x_0 es arbitrario, se cumple entonces que *f* es continua en $x \quad \forall x \in (-2,1)$, por lo tanto *f* es continua en $(-2,1)$.

(ii) Ahora, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} x^2 - 1 = 3$ y como $f(-2) = 3$ se tiene $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2)$, lo cual significa que *f* es continua por la derecha en -2.

(iii) Así también, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 - 1 = 0$ y $f(1) = 0$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, lo cual significa que *f* es continua por la izquierda en 1.

De esta manera, se cumplen los tres incisos de la definición, por lo tanto *f* es continua en $[2,1]$.

(II) ¿Qué podemos decir con respecto a la continuidad de *f* en $(1,5]$? Para que se dé la continuidad en este intervalo, se debe analizar la continuidad o no en el intervalo abierto $(1,5)$ y la continuidad por la izquierda en 5.

(III) ¿Es *f* continua en $(1,5)$?

Se observa que sí. Probemos esto:

Sea $x_0 \in (1,5)$ arbitrario; se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ y como $f(x_0) = x_0$, se concluye que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, lo cual significa que *f* es continua en $(1,5)$.

(IV) ¿Es *f* continua por la izquierda en 5? Sí, veamos: $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} x = 5$ y como $f(5) = 5$, se concluye que $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = f(5)$, es decir, *f* es continua por la izquierda en 5. De III y IV se concluye que *f* es continua en $(1,5]$.

(V) Por último, preguntamos ¿*f* es continua en $[-2,5]$? No, puesto que *f* no es continua en $(-2,5)$, ¿por qué?, porque no es continua en todos los elementos de $(-2,5)$, es decir, existe un $x_0 \in (-2,5)$ tal que *f* no es continua en x_0.

¿Quién es ese x_0? $x_0 = 1$.

Como $0 = f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$, se tiene, por afirmación 3.4.2, que *f* no es continúa en 1, no es continua por la derecha en 1, y es continua por la izquierda en 1.

Resumiendo:

(a) *f* es continua en $[-2,1]$ (ver I).
(b) *f* es continua en $(1,5)$ (ver III).
(c) *f* no es continua en $[1,5]$ (ver V parte final), ya que no es continua por la derecha en 1).
(d) *f* es continua en $(1,5]$ (ver III y IV).
(e) *f* no es continua en $(-2,5)$ (ver V).
(f) *f* no es continua en $[-2,5]$ (ver V).

Finalmente, una función continua en un número es continua por la izquierda o por la derecha en dicho número.

EJERCICIOS:

3.4.1 Grafique y diga si son continuas o no en $[2,5]$ las siguientes funciones:

a) $$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \in (2,5) \\ 6 & \text{si} \quad x = 5 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

b) $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in(2,5) \\ 26 & \text{si} \quad x=5 \\ 4 & \text{si} \quad x=2 \end{cases}$

c) $h(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x\in(2,5) \\ 1/6 & \text{si} \quad x=2 \\ 1/20 & \text{si} \quad x=5 \end{cases}$

3.4.2. Para $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<-1 \\ x+1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$ probar que

a) f es continua en $(-\infty,-1)$.
b) f no es continua en $\mathbb{R}$.

3.4.3. Sea g continua en $(-\infty,a]$, y f continua en $[a,+\infty)$; definimos

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x\leq a \\ h(x) & \text{si} \quad x\geq a \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en a si y solo si $g(a)=h(a)$.

IV. Teoremas sobre funciones continuas

Este capítulo consta de tres resultados sobre funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, los cuales son plataforma inmediata de los resultados sobre derivación e integración. A estos teoremas, en algunos textos, se les conoce como los tres teoremas fuertes. Estos teoremas sobre funciones continuas pueden ser visualizados geométricamente en un examen inicial intuitivo, para posteriormente ser demostrados con todo rigor. El primer teorema afirma que existe un número dentro del intervalo cuya imagen es igual a 0, bajo el supuesto de que las imágenes de los extremos del intervalo son una positiva y la otra negativa; el segundo teorema, nos dice que el conjunto de imágenes del intervalo estará siempre acotado; por último, el tercer teorema nos dice que existe un número en el intervalo tal que la imagen de éste siempre es mayor o igual a cualquier imagen que provenga del intervalo.

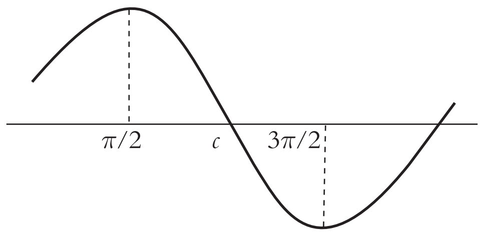
(1) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, se observa en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \text{ (ver figura 4.1), es decir, } f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \text{ y } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0.$$

Además, se sabe que f es una función continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, aún más, se sabe que es continua en todo $\mathbb{R}$.

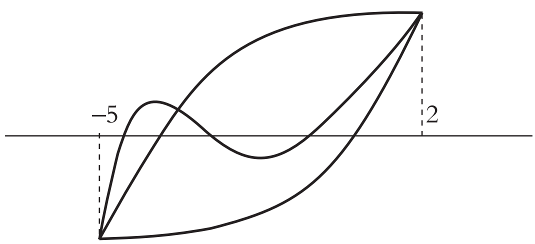
Para la función f se puede dibujar su gráfica en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ "de un solo trazo, sin despegar el lápiz del papel", observando que la gráfica corta al eje X, lo cual significa que *f* se anula en un valor *c* del intervalo, es decir, existe $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tal que $f(c) = 0$ (se sabe que *c*, en este caso, es igual a π).

Figura 1



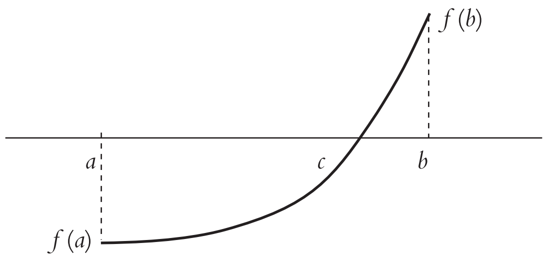
(2) Ahora, si tenemos una función *g* definida en $[-5, 2]$ con $g(-5) = -1$, $g(2) = 4$ y *g* continua en $[-5, 2]$, como en la figura 2, preguntamos: ¿se puede intuir lo mismo que en el inciso anterior? Es decir, ¿se puede intuir que existe $c \in [-5, 2]$ tal que $g(c) = 0$? La figura 2 ilustra la situación, mostrando tres trazos de posibles funciones *g* continuas en $[-5, 2]$. Observe que uno de estos trazos corta tres veces al eje *X*, lo que significa que existen tres números en $[-5, 2]$ donde la función *g* se anula; efectivamente, existe un número (por lo menos) $c \in [-5, 2]$ para el cual $g(c) = 0$.

Figura 2



De los dos anteriores incisos podemos plantear que, si una función *f* es continua en $[a, b]$ tal que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces se concluye que existe un número $c \in [a, b]$ para el cual $f(c) = 0$.

Figura 3



Demostremos que si f es continua en $[a,b]$, y está en situación de la figura 3, se cumplirá entonces que existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = 0$.

Primer teorema:

Si f es continua en $[a,b]$ con $f(a) < 0 < f(b)$, entonces $\exists\ c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.

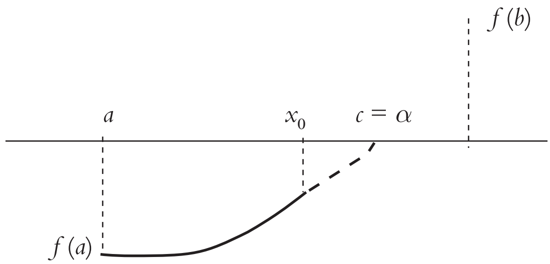
Demostración

Para la prueba de este teorema se asume la sugerencia de M. Spivak (1988, p. 174).

La propuesta consiste en llegar a probar que sup $A = \alpha$, es el número c buscado, donde

$A = \{x \mid a \leq x \leq b$ con f negativa en $[a,x]\}$ (ver figura 4).

Figura 4



Observe que el x_0 de la figura 5 es un elemento del conjunto A, ya que f es negativa en $[a, x_o]$. Nuestro objetivo es concluir $f(\alpha) = 0$.

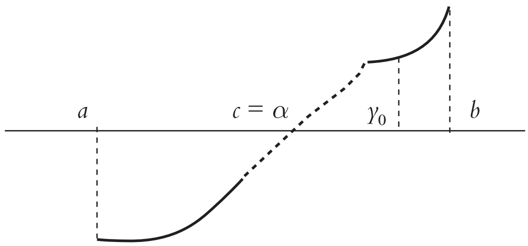
Obtengamos información sobre A:

Primero, $A \subseteq [a,b]$ nos dice que b es una cota superior de A, ya que b es una cota superior de $[a,b]$.

Por hipótesis $f(b) > 0$, ¿será cierto que si $y_0 \in [a,b]$ con $f(y_0) > 0$ entonces y_0 será una cota superior de A? (Ver figura 5).

La figura 5 nos dice que y_0, el cual cumple $f(y_0) > 0$, si es una cota superior de A.

Figura 5



(I) Demostremos formalmente que $\forall\ y \in [a,b]$ con $f(y) > 0$ se implica que y es cota superior de A.

Tomemos un $y_0 \in [a,b]$ arbitrario con $f(y_0) > 0$ y probemos que $\forall x \in A$ se cumple $x \leq y_0$.

Procediendo por contradicción, supongamos que $\exists\ x_0 \in A$ tal que $x_0 > y_0$.

Como $a \leq y_0 < x_0$ y se sabe que $x_0 \in A$, se tiene entonces que f es negativa en $[a, x_0]$ y por lo tanto $f(y_0) < 0$, contradiciendo así el hecho inicial de que $f(y_0) > 0$; por lo tanto es falso suponer que $\exists\ x_0 \in A$ tal que $x_0 > y_0$, de esta forma se debe cumplir que $\forall\ x \in A$, $x \leq y_0$ lo cual nos dice que y_0 es cota superior de A.

Luego, como y_0 es arbitraria, se cumplirá entonces que $\forall\ y \in [a,b]$ con $f(y) > 0$ se tiene que y es cota superior de A.

(II) El conjunto$A$ está acotado superiormente, por lo tanto, existe el $\sup A$ y lo denotamos por $\alpha = \sup A$, $\alpha \in [a,b]$.

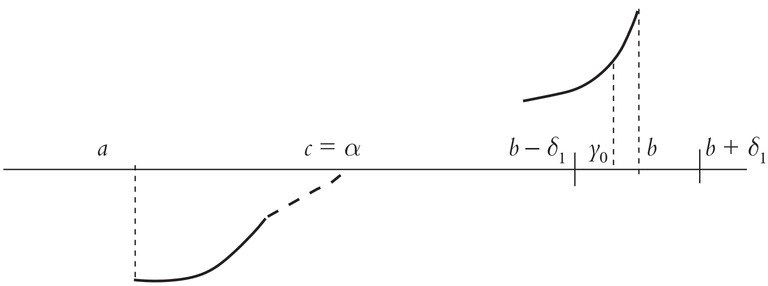
Como b es cota superior de A y α es la cota superior más pequeña, se debe cumplir $\alpha \leq b$.

Demostremos que $\alpha = b$ no se puede cumplir, procedamos por contradicción.

Supongamos que sí se cumple $\alpha = b$.

Como $\alpha = b$, $f(b) > 0$ y f es continua por la izquierda en b, se tiene que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que f es positiva en $\left(b - \delta_1, b\right]$ (pruebe esto, siempre podemos tener un δ_1) como en la figura 6.

Figura 6

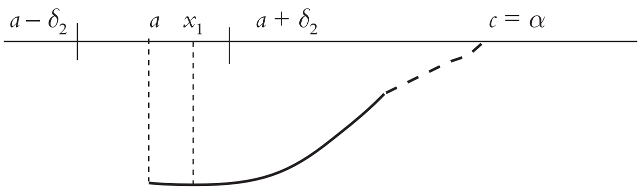


En el intervalo $\left(b - \delta_1, b\right]$ existe con un y_0 con $b - \delta_1 < y_0 < b$ (ver figura 6), el cual cumple $f(y_0) > 0$, esto nos dice que y_0 es cota superior de A, de acuerdo con (I). Luego como $y_0 < b$, esto contradice el hecho de suponer que b es la cota superior mínima de A. Por lo tanto es falso suponer que $b = \alpha$, lo cual nos dice que la relación entre α y b debe ser $\alpha < b$.

(III) Ahora preguntamos: ¿α puede ser igual a a? La respuesta es no (observe las figuras 5 y 6). Demostrémoslo formalmente procediendo por contradicción.

Supongamos que $\alpha = a$. Como f es continua por la derecha en a y $f(a) < 0$, se tiene que $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que f es negativa en $\left[a, a + \delta_2\right)$ (pruebe esto, siempre se puede tener un δ_2 como en la figura 7).

Figura 7



Observemos que existe $x_1 \in [a, a+\delta_2)$ con $a < x_1 < b$ donde $\left[a, x_1\right] \subseteq [a, a+\delta_2[$, y como *f* es negativa en $[a, a+\delta_2[$ se tiene claramente que *f* es negativa en $\left[a, x_1\right]$, lo cual nos dice que $x_1 \in A$. Lo anterior significa que $\alpha = a < x_1$ lo cual es una contradicción, ya que α es cota superior (mínima) de *A*.

Por lo tanto, es falso suponer $\alpha = a$.

De (II) y (III) se concluye que $a < \alpha < b$.

Ahora nos preguntamos en cuál de los siguientes escenarios se encuentra $f(\alpha)$.

(i) $f(\alpha) > 0$ (ii) $f(\alpha) < 0$ (iii) $f(\alpha) = 0$

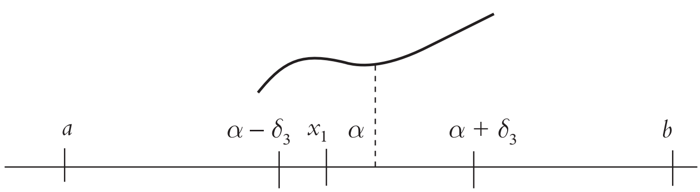
Nuestro objetivo es demostrar que $f(\alpha) = 0$, para lograr esto, veamos que no se pueden cumplir los incisos (i) y (ii).

Supongamos que se cumple (i).

Como $f(\alpha) > 0$ y *f* es continua en $\alpha \in \left[a, b\right]$, se tiene por el ejercicio 3.3.7 que existe $\delta_3 > 0$ tal que *f* es positiva en $\left(\alpha - \delta_3, \alpha + \delta_3\right)$ (figura 8). Siempre se puede tener a δ_3 como en la figura 8).

Se sabe que existe $x_1 \in \left(\alpha - \delta_3, \alpha\right)$ con $a < x_1$ y para este valor x_1 se tiene $f(x_1) > 0$ y por (I), se tendrá entonces que x_1 es cota superior de *A*, contradiciéndose con esto que α es la mínima cota superior de *A*, por lo tanto no puede ocurrir $f(\alpha) > 0$.

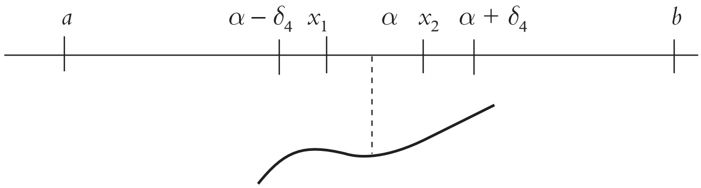
Figura 8



Supongamos que se cumple (ii).

Como $f(\alpha) < 0$ y *f* es continua en $\alpha \in \left[a, b\right]$, se tiene por el ejercicio 3.3.7 que $\exists\, \delta_4 > 0$ tal que *f* es negativa en $\left(\alpha - \delta_4, \alpha + \delta_4\right)$ (figura 9). Siempre se puede tener a δ_4 como en la figura 9.

Figura 9



Recordemos que si $\alpha = \sup A$, entonces $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_0 \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < x_0 < \alpha$, en particular para nuestro $\delta_4 > 0 \;\; \exists x_1 \in A$ tal que $\alpha - \delta_4 < x_1 < \alpha$ (figura 9), pero como $x_1 \in A$, concluimos que f es negativa en $[a, x_1]$.

Ahora, se sabe que entre α y $\alpha + \delta_4$ existe x_2 (figura 9), esto es $\alpha < x_2 < \alpha + \delta_4$.

Como $[x_1, x_2] \subset (\alpha - \delta_4, \alpha + \delta_4)$ y f es negativa en $(\alpha - \delta_4, \alpha + \delta_4)$, entonces tendremos que f es negativa en $[x_1, x_2]$.

Puesto que f es negativa en $[a, x_1]$ y en $[x_1, x_2]$, se tiene que f es negativa en $[a, x_2]$, de donde se implica que $x_2 \in A$, encontrándose con esto una contradicción, ya que $\alpha < x_2$ y α es la cota superior mínima de A.

De esta manera, tampoco se puede tener $f(\alpha) < 0$, quedando como única posibilidad $f(\alpha) = 0$.

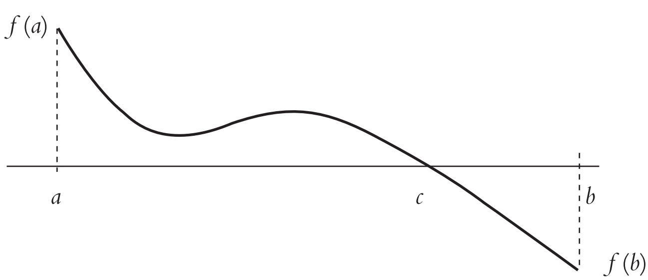
Finalmente, el valor c buscado es $\alpha = \sup A$.

Utilizando el primer teorema, demostremos la siguiente afirmación.

Afirmación 4.1

Sea f continua en $[a, b]$, $f(a) > 0 > f(b) \Rightarrow \exists \; c \in [a, b] \ni \; f(c) = 0$ (figura 10).

Figura 10



Demostración

La idea para demostrar esta afirmación es aplicar el primer teorema.

Como f es continua en $\left[a,b\right]$, entonces $-f$ también es continua en $\left[a,b\right]$. Luego, como $f(a) > 0 > f(b) \Rightarrow -f(a) < 0 < -f(b)$, si llamamos a $-f = g$ se tendrá que g es continua en $\left[a,b\right]$ y $g(a) < 0 < g(b)$, es decir, g cumple las condiciones del primer teorema, por lo tanto $\exists c \in \left[a,b\right] \ni g(c) = 0$, o sea, $\exists\, c \in \left[a,b\right] \ni -f(c) = 0$, lo cual nos dice que $f(c) = 0$, quedando con esto la demostración concluida.

Afirmación 4.2

Sea f continua en $\left[a,b\right]$, $f(a) < c < f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in \left[a,b\right] \ni f(x_0) = c$.

Demostración

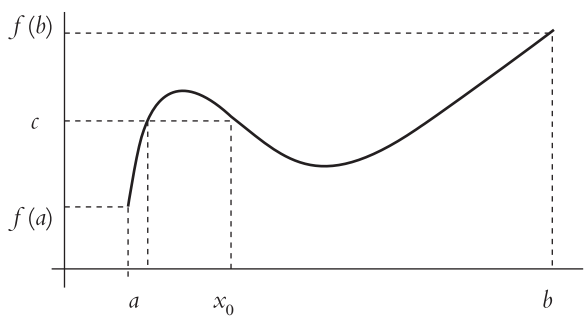
Observe en el dibujo de la figura 11, en particular se tiene que x_0 no es único.

¿Cómo aplicamos el primer teorema en esta demostración?

Construyamos a la función $g(x) = f(x) - c$.

¿g es continua en $\left[a,b\right]$? Sí, puesto que f es continua en $\left[a,b\right]$ por hipótesis y, c la función constante c es también continua en $\left[a,b\right]$, aún más, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Figura 11



¿$g(a)$ y $g(b)$ son uno positivo y el otro negativo, respectivamente?

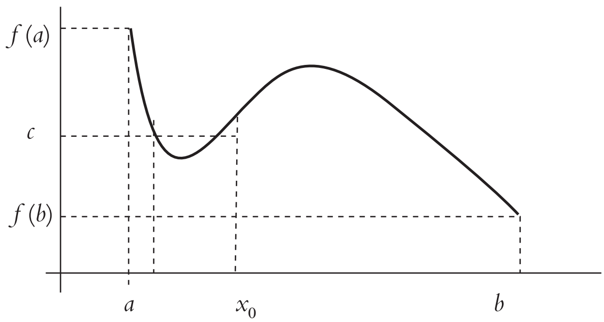
Veamos que $g(a) = f(a) - c$, y de los supuestos $f(a) < c$, por lo tanto $f(a) - c < 0$, esto nos dice que $g(a) < 0$.

Así también, $g(b) = f(b) - c$ y como $f(b) > c$ por hipótesis, se tendrá que $g(b) = f(b) - c > 0$.

Resumiendo, se tiene lo siguiente:

g continua en $[a,b]$ con $g(a) < 0 < g(b)$, cumpliéndose las hipótesis del primer teorema para la función g en $[a,b]$, de esta manera concluimos que $\exists x_0 \in [a,b] \ni g(x_0) = 0$, es decir, $\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) - c = 0$, por lo tanto $\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = c$.

Figura 12



Afirmación 4.3

Sea f continua en $[a,b]$, $f(a) > c > f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = c$.

Demostración (figura 12)

Esta es una afirmación similar a la afirmación 4.2.

Utilicemos a la función $-f$ y apliquemos la afirmación 4.2.

Como f es continua en $[a,b]$, se tiene que $-f$ es continua en $[a,b]$.

Por hipótesis se tiene $f(a) > c > f(b)$. Si multiplicamos por -1 la desigualdad anterior tendremos

$-f(a) < -c < -f(b)$.

Observemos que $-f$ cumple con las condiciones de la afirmación 4.2.

De esta manera $\exists x_0 \in [a,b] \ni -f(x_0) = -c$ por lo tanto $\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = c$, quedando así la demostración terminada.

Problema 4.1

Demuestre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$ donde $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Solución

Para demostrar esto, nos gustaría encontrar una pareja de números a, b, tales que $f(a)$ y $f(b)$ uno sea positivo y el otro negativo.

Estimemos algunos valores.

Proponemos a 3, encontremos su imagen:

$$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 27 - 9 + 1 > 0.$$

Ahora, no es difícil ver que para cualquier valor más grande que 3, la imagen respectiva será positiva, de esta forma, encontremos un número menor a 3 cuya imagen sea negativa, por ejemplo, evaluemos *f* en –2:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1 < 0.$$

Resumiendo, lo que se ha encontrado es una pareja de números, -2 y 3, para los cuales se tiene $f(-2) < 0 < f(3)$, y se sabe que la función *f* es continua en $[-2,3]$ (*f* es continua en $\mathbb{R}$), por lo tanto, de acuerdo con el primer teorema, se tiene que $\exists x_0 \in [-2,3] \ni f(x_0) = 0$.

Ahora veamos nuestro segundo teorema.

(3) La función $f(x) = x + 2$ es una función continua en $[-3,1]$. De la figura 13 notamos que $f(x) \le 3 \ \ \forall x \in [-3,1]$. La función *f* es continua en $[-3,1]$ y acotada superiormente.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Sea $g(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ defina en el intervalo $[-2,2]$ (figura 14).

Figura 13

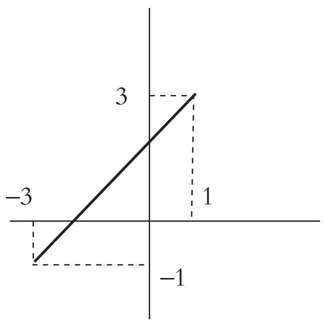
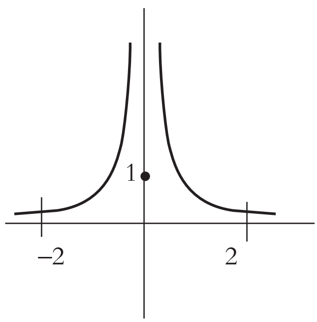


Figura 14



¿Se cumple que g es acotada superiormente en g? No, además tenemos que g no es continua en $[-2,2]$, ya que g no es continua en 0.

Revisando estos dos sencillos ejemplos, se puede notar que los conceptos de función continua y función acotada pueden estar relacionados.

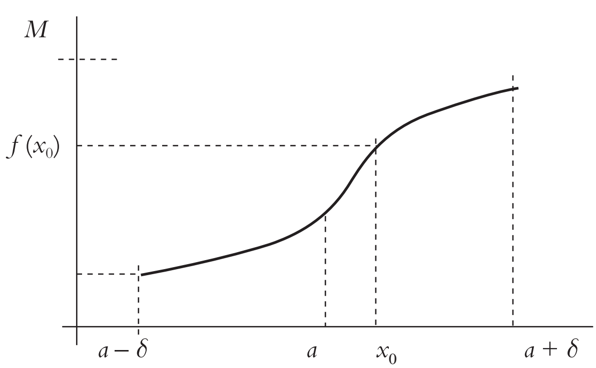
Esa relación se hace patente en nuestro segundo teorema.

Proposición 4.1

Si f es continua $a \Rightarrow \exists \delta > 0 \ni f$ es acotada superiormente en $(a-\delta, a+\delta)$.

Demostración

Figura 15



El problema consiste en construir un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ tal que exista un $M \in \mathbb{R}$, para el cual $f(x) \leq M \ \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ (que $x \in (a-\delta, a+\delta)$ es equivalente a escribir $|x-a| < \delta$).

Las hipótesis nos dicen que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni \forall x$ si $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ por ser *f* continua en *a*.

Para un $\varepsilon_0 > 0$ fijo se tiene que $\exists \ \delta_0 > 0 \ni \forall x$ con $|x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$. De esta última desigualdad se tiene que $f(x) - f(a) \leq |f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$...(I).

De (I) se observa que $\forall x \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon_0$ o equivalente $\forall x \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \Rightarrow f(x) < \varepsilon_0 + f(a)$.

Ahora preguntamos:

¿Cuál es el valor de δ que deseamos encontrar? $\delta = \delta_0$

¿Quién es el valor de *M* para el cual $f(x) \leq M \ \ \forall x$ en el intervalo $(a-\delta_0, a+\delta_0)$? $M = \varepsilon_0 + f(a)$. Con lo anterior se concluye la demostración.

Demostremos nuestro segundo teorema.

Segundo teorema

Si *f* es continua en $[a,b] \Rightarrow$ entonces *f* es acotada superiormente en $[a,b]$.

Demostración

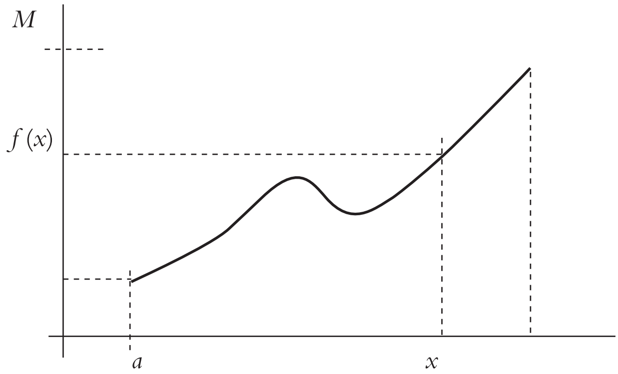
Para demostrar este teorema, nuevamente se asume la sugerencia de M. Spivak (1988, p. 178) que consiste en considerar al conjunto

$A = \{x \mid a \leq x \leq b$ con *f* acotada superiormente en $[a,x]\}$ (figura16).

(I) $A \neq \phi$ ya que $a \in A$, puesto que *f* es acotada superiormente en $[a,a] = \{a\}$, es decir, $\exists M \in \mathbb{R} \ni f(x) \leq M \ \ \forall x \in \{a\}$.

¿Cuánto vale *M*? Proponemos a $M = f(a) + 1$, ya que $f(x) \leq f(a) + 1$ $\forall x \in \{a\} = [a,a]$.

Figura 16



(II) Se puede ver que b es cota superior de A, así tenemos que existe $\alpha = \sup A$; la idea es demostrar que $\alpha = b$.

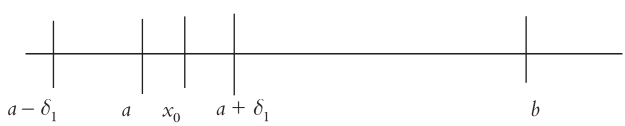
Sabemos que la relación que existe entre α y b es $\alpha \leq b$, de esta manera, se probará que $\alpha < b$ no se puede cumplir y de ahí implicaremos $\alpha = b$.

Primero, demostremos que $\alpha = a$ no se puede cumplir.

Hagámoslo por contradicción suponiendo que $\alpha = a$.

Como f es continua en $\alpha = a$, se tiene que $\exists\, \delta_1 > 0 \ni f$ es acotada superiormente en $(\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1)$ (Proposición 4.1). Siempre se puede tener a δ_1 como en la figura 17.

Figura 17



Sabemos que existe x_0 tal que $a = \alpha < x_0 < \alpha + \delta_1$ con $x_0 < b$ y como f es acotada superiormente en $[\alpha, \alpha + \delta_1)$ por ser subconjunto de $(\alpha - \delta_1, \alpha + \delta_1)$, se obtiene que f es acotada superiormente en $[a, x_0]$ que es subconjunto de $[\alpha, \alpha + \delta_1)$, y por lo tanto $x_0 \in A$.

Luego, como $\alpha < x_0$ tenemos una contradicción, puesto que $\alpha = \sup A$, es decir, se contradice el hecho de que $\forall x \in A$ se cumple $x \leq \alpha = \sup A$, por lo tanto, se debe tener $a < \alpha$.

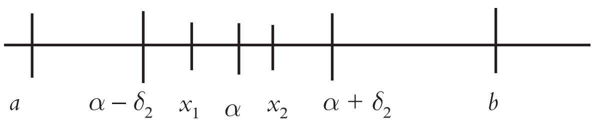
(III) Ahora demostremos que es falsa la desigualdad $\alpha < b$.

Como $\alpha \in [a,b]$ y f es continua en $[a,b]$, entonces f es continua en α.

Utilizando la proposición 4.1, se tiene que $\exists\, \delta_2 > 0 \ni f$ es acotada superiormente en $(\alpha - \delta_2, \alpha + \delta_2)$. Siempre se puede tener δ_2 como en la figura 18.

Como $\alpha = \sup A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_1 \in A \ni \alpha - \varepsilon < x_1 < \alpha$, en particular para nuestra δ_2 se tiene que $\exists x_1 \in A \ni \alpha - \delta_2 < x_1 < \alpha$.

Figura 18



Así también, $\exists x_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha < x_2 < \alpha + \delta_2$ y $x_2 < b$.

Como $x_1 \in A \Rightarrow f$ es acotada superiormente en $[a, x_1]$, y como f está acotada superiormente en $(\alpha - \delta_2, \alpha + \delta_2)$, entonces f está acotada superiormente en $[x_1, x_2]$ que es un subconjunto del intervalo de radio δ_2.

Así concluimos que f es acotada superiormente en $[a, x_2]$, y esto significa que $x_2 \in A$ con $\alpha < x_2$, contradiciendo el hecho de que $\alpha = \sup A$; por lo tanto, es falso suponer $\alpha < b$, y de esta manera afirmamos que $\alpha = b$.

Con lo anterior hemos demostrado que $\forall x \in A$, f acotada superiormente $[a,x]$ se tiene que $x \le b = \alpha$, pero aún no se demuestra que f es acotada superiormente $[a,b]$.

Para ver esto, se tiene que como f es continua en $b \;\; \exists \delta_3 > 0 \ni f$ es acotada superiormente en $(b - \delta_3, b + \delta_3)$ (Proposición 4.1).

Nuevamente, como $b = \alpha = \sup A$ se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in A \ni b - \varepsilon < x < b = \alpha$, así, en particular para nuestra $\delta_3 \;\; \exists x_4 \in A$ con $b - \delta_3 < x_4 < b = \alpha$.

Como $x_4 \in A \Rightarrow f$ es acotada superiormente en $[a, x_4]$, luego como f es acotada superiormente en $(b - \delta_3, b]$ por ser un subconjunto de $(b - \delta_3, b + \delta_3)$, concluimos que f es acotada superiormente en $[a,b]$.

Afirmación 4.4

Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ es acotada inferiormente en $[a,b]$.

Demostración

¿Qué significa que f sea acotada inferiormente en $[a,b]$?

Que $\exists N \in \mathbb{R} \ni f(x) \geq N \ \forall x \in [a,b]$, esto significa que se debe obtener el valor de N que satisfaga la desigualdad.

Como f es continua en $[a,b]$, entonces $-f$ será continua en $[a,b]$ y por el segundo teorema se tiene que $-f$ es acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, $\exists M \in \mathbb{R} \ni -f(x) \leq \mathrm{M} \ \forall x \in [a,b]$; si se multiplica por -1 esta desigualdad se tiene que $\exists -M \in \mathbb{R} \ni f(x) \geq -M \ \forall x \in [a,b]$, de esta forma la N buscada es $N=-M$.

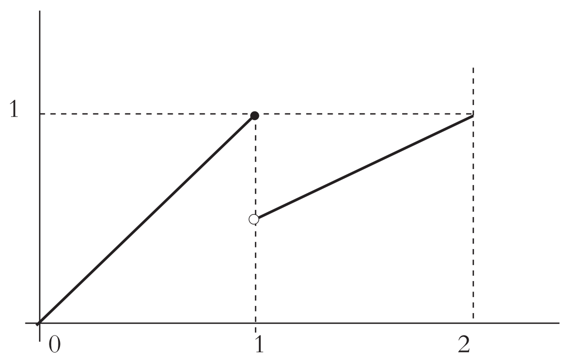
Importante

Del segundo teorema y la afirmación 4.2, se concluye que si f es continua en $[a,b]$, entonces f es acotada en $[a,b]$.

Se le recomienda al lector exhiba un ejemplo de una función, la cual no sea continua en un intervalo cerrado y a la vez no sea acotada.

Hacemos notar que, en general, es falso decir que si f no es continua en $[a,b]$, entonces f no es acotada en $[a,b]$.

Figura 19



Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ x/2 & \text{si} \quad x \in (1,2] \end{cases}$

Cuya gráfica aparece en la figura 19, *f* no es continua en 1, pero si es acotada tanto superior como inferiormente.

(4) Sea $f(x) = 2x - 3$ definida en $[0,2]$ (ver figura 20).

Como *f* es continua en $[0,2]$, se tiene que es acotada en $[0,2]$, una cota superior para *f* es por ejemplo 6, observe que $f(x) \leq 6 \ \ \forall x \in [0,2]$, incluso, lo más grande que puede ser $f(x)$ se da cuando $x = 2$. La última observación nos dice que $f(x) \leq f(2) \ \forall x \in [0,2]$ y $2 \in [0,2]$.

Figura 20

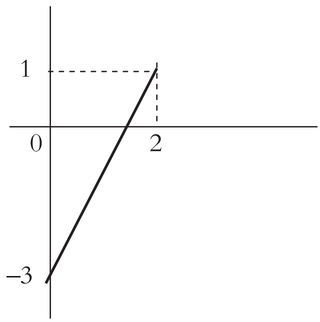
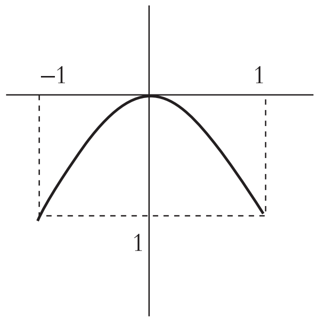


Figura 21



Se puede pensar que existe $x_0 = 2$ en el intervalo $[0,2]$, tal que $f(x) \leq f(2)$ $\forall x \in [0,2]$.

(5) Para la función $g(x) = -x^2$, definida en $[-1,1]$ (ver figura 21), nótese que $g(x) \leq g(0) \ \forall x \in [-1,1]$ y $0 \in [-1,1]$.

La figura 21 muestra la gráfica de una función *f* continua en $[a,b]$, para la cual existe $x_0 \in [a,b] \ni f(x) \leq f(x_0) \ \ \forall \ \ x \in [a,b]$.

Lo anteriormente mencionado constituye el tercer teorema (ver figura 22).

Tercer teorema

Si *f* es continua en $[a,b]$ entonces $\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x) \leq f\left(x_0\right) \forall x \in [a,b]$.

Demostración

¿Qué significa probar que $\exists x_0 \ni f(x) \leq f\left(x_0\right) \; \forall x \in \left[a,b\right]$?

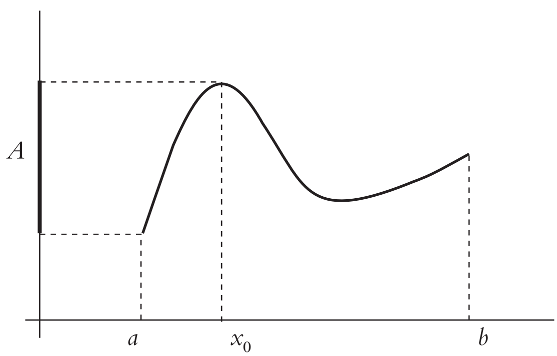
Que se debe construir, proponer o dar evidencia, de la existencia del tal x_0 que cumpla con $f(x) \leq f\left(x_0\right) \; \forall x \in \left[a,b\right]$. Para ver esto, utilicemos al conjunto $A = \left\{ f(x) \mid x \in \left[a,b\right] \right\}$, como lo sugiere y desarrolla M. Spivak (1988, p. 179).

¿Qué sabemos acerca de A?

Como f es continua en $\left[a,b\right]$, por el segundo teorema se tiene que f es acotada superiormente en $\left[a,b\right]$, es decir, $\exists M \in \mathbb{R} \ni f(x) \leq M \; \forall x \in \left[a,b\right]$.

Lo anterior significa que A es un conjunto acotado superiormente, de esta manera, se tiene que existe el sup A.

Figura 22



Llamemos $\alpha = \sup A$.

¿Qué cumple α?

Cumple $f(x) \leq \alpha \; \forall x \in \left[a,b\right]$, donde α es el menor de los números que cumple la desigualdad.

Nos gustaría encontrar un $x_0 \in \left[a,b\right]$ tal que $f(x_0) = \alpha$, para que se cumpliera que $\exists x_0 \in \left[a,b\right] \ni f(x) \leq f(x_0) \; \forall x \in \left[a,b\right]$.

¿Cómo demostrar que $\exists x_0 \in \left[a,b\right] \ni f(x_0) = \alpha$?

Demostrémoslo por contradicción.

Supongamos que $\forall x \in \left[a,b\right] \; f(x) \neq \alpha$; de esta forma, la función $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$ será una función continua en $\left[a,b\right]$ (verifique esto).

Como $\alpha = \sup A = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, se tiene que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists f(x) \in A$ con $x \in [a,b] \ni \alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha$.

Ahora, observe que $\alpha - \varepsilon < f(x)$ nos dice que $\alpha - f(x) < \varepsilon$ y de esta manera tendremos $\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\alpha - f(x)} = g(x)$. Note que se ha llegado a lo siguiente: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in [a,b] \ni \frac{1}{\varepsilon} < g(x)$.

Lo anterior nos dice que si tomamos un $\varepsilon > 0$ muy pequeño, existe siempre un $x \in [a,b]$ tal que $g(x)$ es más grande que $\frac{1}{\varepsilon}$, el cual es grande. ε puede ser cada vez más y más pequeño y siempre existirá un $x \in [a,b]$ para el cual $g(x)$ sea más grande que $\frac{1}{\varepsilon}$ (recuerde que $\frac{1}{\varepsilon}$ es grande sí ε es pequeño). Lo anterior nos dice que g no es acotada superiormente en $[a,b]$, pero como g es continua en $[a,b]$, se contradice así el segundo teorema.

Por lo tanto, es falso suponer que $\forall x \in [a,b] \;\; f(x) \neq \alpha$. Finalmente, debe ser verdad que $\exists \; x_0 \in [a,b] \ni f(x_0) = \alpha$, y como $\alpha = \sup A$, o sea, $f(x) \leq \alpha \;\; \forall x \in [a,b]$, se concluye entonces que $\exists x_0 \in [a,b] \ni f(x) \leq f(x_0) \;\; \forall x \in [a,b]$.

Veamos la siguiente afirmación que se sigue del tercer teorema.

Afirmación 4.5

Si *f* es continua en $[a,b]$, entonces $\exists x_0 \ni f(x) \geq f(x_0) \;\; \forall x \in [a,b]$.

Demostración

Si se considera a la función –*f*, como *f* es continua en $[a,b]$, entonces –*f* es continua en $[a,b]$, y por lo tanto se cumple el tercer teorema, es decir, existe $x_0 \in [a,b] \ni$ $-f(x) \leq -f(x_0) \;\; \forall x \in [a,b]$. De esta forma, como de $-f(x) \leq -f(x_0)$ se tiene $f(x) \geq f(x_0)$, se concluye que existe $x_0 \in [a,b] \ni f(x) \geq f(x_0) \;\; \forall x \in [a,b]$, quedando así la demostración concluida.

Importante

El tercer teorema y la afirmación 4.5 nos dicen que si *f* es continua en $[a,b]$ existen

$x_1, x_2 \in [a,b] \ni f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \;\; \forall x \in [a,b]$.

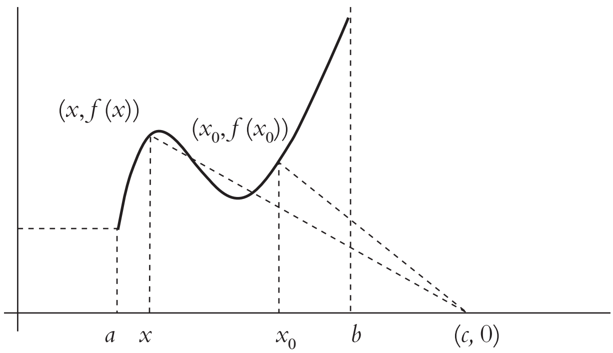
¿Qué podría decir de x_1 y x_2 en caso de que f fuera una función constante?

Problema 4.2

Sea f continua en $\left[a,b\right]$ y $b < c$ como en la figura 23, se afirma que existe $x_0 \in \left[a,b\right]$ tal que la distancia de $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ al punto $\left(c,0\right)$ es mínima.

Solución

Figura 23



La distancia entre los puntos $(x, f(x))$ y $(c,0)$, donde $x \in \left[a,b\right]$, genera una función la cual depende de x, esta es:

$$d\left(x\right) = \sqrt{\left(x-c\right)^2 + \left(f\left(x\right)-0\right)^2}$$

$$d\left(x\right) = \sqrt{\left(x-c\right)^2 + f^2\left(x\right)}$$

La función d es continua en $\left[a,b\right]$, por lo tanto, existe $x_0 \in \left[a,b\right]$ tal que $d(x_0) \leq d\left(x\right)\ \forall x \in \left[a,b\right]$, de acuerdo con la afirmación 4.5, así $d\left(x_0\right)$ es la mínima distancia entre la gráfica de f continua en $\left[a,b\right]$, y el punto $\left(c,0\right)$.

EJERCICIOS

4.1 Decir si están acotadas, superior o inferiormente, en el intervalo indicado, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x<a \\ a+2 & \text{si } x\geq a \end{cases}$ en $[-a-1, a+1]$ con $a>0$

b) $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq a \\ a+2 & \text{si } x>a \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$

4.2 Para cada una de los polinomios *f*, hallar un entero *n* tal que $f(x)=0$ para algún *x* entre *n* y *n* + 1.

a) $f(x)=x^3-x+3$

b) $g(x)=x^5+5x^4+2x+1$

4.3 Si *n* es par y $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, entonces existe un número *y* tal que $f(y)\leq f(x)\ \ \forall\ \ x$ (ver Spyvak, capitulo 7, teorema 10).
4.4 Demostrar que si $\alpha>0$ entonces existe x_0 tal que $x_0{}^2=\alpha$.

Bibliografía

Al-Gwaiz, M.A. (2007), *Elements of Real Analysis*. Chapman & Hall.

Apostol, Tom (1988), *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Reverté.

Blanche, Robert (2002), *La axiomática*. Fondo de Cultura Económica.

Bartle, Robert, Donal Sherbert (2011), *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons.

Bilodeau, Gerald, Paul Thie (2010), *An Introduction to Analysis*. Boston: Jones & Bartlett.

Browder, Andrew (1996), *Mathematical Analysis*. An Introduction. Springer.

Buck, Robert (1978), *Advanced Calculus*. Mac Graw Hill.

Denlinger, Charles (2011), *Elements Real Analysis.* Subdury Mass.

Dieudonne, Jean (1979), *Fundamentos de análisis matemático moderno*. Reverté.

Epp, Susanna (2011), *Matemáticas discretas con aplicaciones*. Cengage Learning.

Haaser, Norman, Joseph Sullivan (1991), *Real Analysis*. Dover Publications.

Howland, James (2010), *Basic Real Analysis*. Sudbury, Mass: Jones & Bartlett Publishers.

Kannan, Rangachary (1996), *Advanced Analysis on the Real Line*. Springer.

Kannap, Anthoni (2005), *Basic Real Analysis.* Boston: Birkhäuser.

Krantz, Steven (2005), *Real Analysis and Foundations*. Chapman & Hall.

Kuratowsky, Kazimiers (1979), *Introducción al cálculo y al análisis matemático*. Limusa.

Laczkovich, Miklós, Vera Sós (2015), *Real Analysis. Foundations and Functions of One Variable*. Springer.

Protter, Murray (1998), *Basic Elements of Real Anlysis*. Springer.

Pugh, Charles (2002), *Real Mathematical Analysis*. Springer-Verlag.

Robdera, Mangatiana (2005), *Un enfoque conciso para el análisis matemático*. Springer-Verlag.

Ross, Kenneth (2002), *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*. Springer.

Schramm, Michael (2008), *Introducción al análisis real*. Nueva York: Dover Publications.

Schumacher, Carol (1993), *Closer and Closer: Introducing Real Analysis*. Boston: Jones & Bartlett Publishers.

Smith, Keean (1983), *First Course of Modern Analysis*. Springer-Verlag.

Solow, Daniel (1989), *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. Limusa.

Spivak, Michael (1988), *Calculus. Cálculo infinitesimal*. Reverte.

Glosario de símbolos

$\in$	pertenece
$\notin$	no pertenece
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
$\subset$	contención
$\mid$	tal que
$\ni$	tal que
$\exists$	existe
$\forall$	para todo
$\rightarrow$	tiende a
∞	infinito
$\Rightarrow$	implica, entonces
$\Leftrightarrow$	si y sólo si
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$	conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales

Introducción al estudio de funciones de una variable real, se terminó de imprimir en noviembre de 2020. En su composición se utilizaron tipos de la familia Bembo Std; el tiraje consta de 500 ejemplares impresos sobre papel cultural. Impresión *mc editores*, Selva 53-204, Insurgentes Cuicuilco, 04530 Ciudad de México, tel. (52)(55) 5665-7163 [mceditores@hotmail.com].

casadelibrosabiertos.uam.mx
dcsh.xoc.uam.mx
facebook.com/DcshPublicaciones
libreria.xoc.uam.mx
biblioteca.xoc.uam.mx

José de Jesús Gutiérrez Ramírez es licenciado en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional; maestro en Economía por el Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE); ha sido profesor de matemáticas en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del IPN, el CIDE, la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, la Universidad Tecnológica de México, entre otras instituciones. Es coautor del libro *Introducción al análisis de Rn* (con Gloria Baca). Es profesor investigador del Departamento de Producción Económica de la UAM Xochimilco, donde ha publicado sobre desigualdad de género, pobreza y teoría de la empresa, aplicando modelación matemática. Actualmente trabaja en análisis matemático aplicado a la microeconomía y en didáctica del cálculo con elementos de la semiótica.

Publicaciones

(a) $f(x) = -x + 1$ y $g(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \neq -2, 2 \\ -1 & \text{si} \quad x = 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 2 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

c) $h(x) = 2x - 3$ y $l(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

9 786072 820548

Este libro contiene los temas básicos sobre funciones de una variable real, a partir del conocimiento previo de las propiedades y los resultados más importantes sobre números reales y sucesiones. Los contenidos expuestos sobre funciones, representan una partitura fundamental para el inicio del estudio del cálculo desde un punto de vista avanzado. La intención de este texto es presentar los resultados básicos sobre funciones de una variable real, donde se haga explícita la metodología en la presentación y desarrollo de los contenidos y las demostraciones que emergen de los planteamientos. Entre los lectores a quien va dirigida esta obra se encuentran estudiantes de los primeros semestres de matemáticas o física, y también de posgrado en diferentes ramas de ingeniería, economía o administración, cuyos programas de estudio exigen un manejo de métodos cuantitativos en un nivel avanzado.