UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD XOCHIMILCO

Divisón de Ciencias Sociales y Humanidades
Departamento de Política y Cultura

LICENCIATURA EN POLÍTICA Y GESTIÓN SOCIAL

ÁLGEBRA LINEAL

IRENE SÁNCHEZ GUEVARA
VÍCTOR BREÑA VALLE

Casa abierta al tiempo

ISBN de Tomo 978-607-477-453-5
ISBN de obra 978-607-477-451-1

D R Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco
Calzada del Hueso 1100
Col Villa Quietud
Delegación Coyoacán
04960 Mexico, D F
Teléfonos (52) (55) 5483 7110 y 5483 7111
Fax (52) (55) 5594 9100

Producción editorial e impresión
Impreso en México / *Printed in Mexico*
Impresora Cometa
Cerrada Michoacán #4 Col Paraje Zacatepec
Deleg Iztapalapa C P 09560 Tel 5691-7053

INDICE

Los autores de la presente obra agradecerán toda sugerencia o comentario sobre el contenido de la misma.

En el ámbito de la Matemática subsisten, a la fecha, debates que parecen interminables Como ejemplo, dos de ellos ¿se crea (inventa) la Matemática o se descubre?, ¿son indispensables las demostraciones formales y rigurosas o, en ciertas circunstancias, se puede prescindir de ellas? En su libro *Matemáticas La pérdida de la certidumbre*, Morris Kline sostiene que las matemáticas puras modernas se han desarrollado en cuatro direcciones abstracción, generalización, especialización y axiomatización En consecuencia, resulta pertinente preguntarse si tales trayectorias chocan con el potencial de aplicabilidad de la matemática o bien, por lo contrario, las aplicaciones debilitan el desarrollo de los caminos mencionados

Por ejemplo, William R Hamilton (1805-65) **creó** los cuaterniones (números de la forma, $abi + cj + dk$, donde, $i=j=k=\sqrt{-1}$) y los **aplicó** a problemas físicos y geométricos Arthur Cayley (1821-95) **inventó** el álgebra de matrices que son ordenamientos rectangulares de números Los cuaterniones y las matrices fueron creaciones que propiciaron el surgimiento de una gran variedad de álgebras cuyas singulares propiedades ocasionaron que algunos matemáticos cuestionaran la **aplicabilidad** de la aritmética Cayley demostró el teorema de Hamilton-Cayley para matrices de orden 2x2 y al poco tiempo sostuvo que no creía necesario **demostrar formalmente** el teorema para el caso general de matrices de orden nxn Tanto Cayley como Hamilton veían a la matemática incrustada en la mente humana a diferencia de quienes, en su tiempo, afirmaban que la verdad matemática es **descubierta,** no **inventada**, en otras palabras, se desarrolla y se profundiza el conocimiento que el ser humano adquiere de la Matemática que ya está allí en alguna parte

El álgebra lineal es la rama de las matemáticas cuyo objetivo es resolver sistemas de ecuaciones que se expresan en forma matricial Ax=b, para lo cual estudia conceptos tan abstractos como las matrices y sus operaciones, así como los espacios vectoriales entre otros conceptos Lo más relevante de esta rama de las matemáticas es su aplicabilidad a diversos campos del conocimiento, en tanto sea posible convertir del lenguaje verbal una situación susceptible de ser modelada mediante el lenguaje del álgebra lineal, es decir, convertirlo a un sistema de ecuaciones

En estas notas se ofrece los conceptos y herramientas operativas esenciales para capacitar al alumno al planteamiento y solución de este tipo de problemas

0 Antecedentes algebraicos

En esta seccıon se presentan conceptos básıcos mínımos del álgebra, necesarıos para la comprensıón de los aspectos teórıcos del álgebra lıneal y sus ejemplos, así como la ejecución de los ejercıcıos

0 1 La regla de los sıgnos

Sean dos números reales a, b entonces se cumple que

(+a)(+b)=ab

(+a)(-b) =-ab

(-a)(+b) =-ab

(-a)(-b) = ab

0 2 Suma de expresıones algebraıcas

Un térmıno algebraıco formado por el producto de una varıable por una constante 5x, 3y, 3 9z^2, 1567w se denomına monomıo

Una expresıón algebraıca es la suma o resta de dos o más térmınos algebraıcos 5x+3y, x^2+4x+2,

Sı esta expresıón tıene dos térmınos se denomına bınomıo, sı tıene tres trınomıo En general a la expresıón algebraıca con más de un térmıno se le denomına polınomıo

La suma de polınomıos se realıza sumando sólo térmınos semejantes, es decır, se suman o restan los coefıcıentes de los térmınos con las mısmas varıables

Por ejemplo sumar las dos expresıones sıguıentes

(3x +2y) y (-5x +8y)

=> (3x +2y) + (-5x +8y) = (3-5)x+(2+8)y = -2x+10y

La resta es (3x +2y) - (-5x +8y)= (3x +2y) + (-(-5)x -8y)

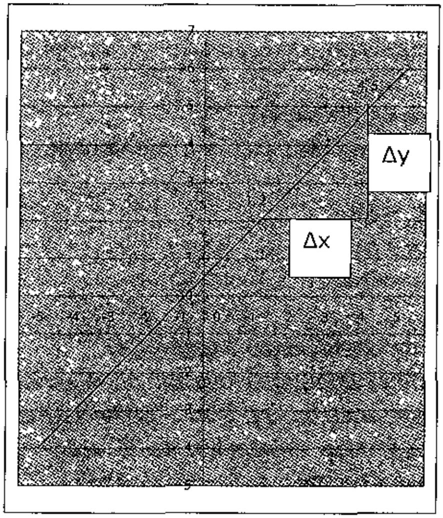
= (3+5)x+(2-8)y= 8x-6y

0 3 La Línea Recta

Una línea recta está defınıda de manera únıca por dos puntos

Una línea recta tıene al menos dos representacıones equıvalentes en forma de funcıón y=mx+b donde m es la pendıente y b la ordenada al orıgen, o bıen como una ecuacıón ax+by =c

Ejemplo encontrar la recta que pasa por los dos siguientes puntos (1,2) y (4,5)



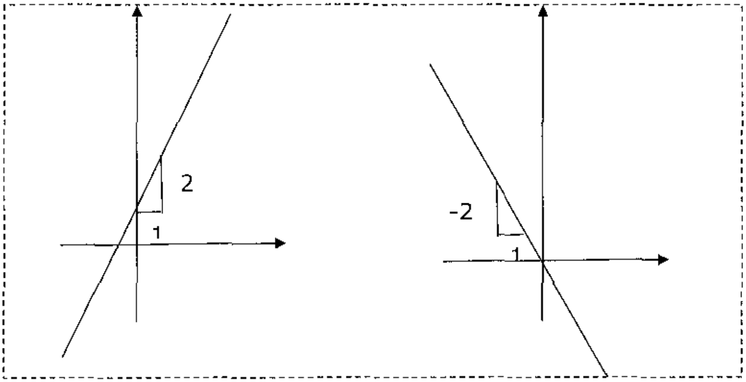
La pendiente de la recta es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(y_2\text{-}y_2)}{(x_2\text{-}x_2)} = \dfrac{(5\text{-}2)}{(4\text{-}1)} = \dfrac{3}{3} = 1$

La representación de esta recta en la forma y=mx+b es

$(y\text{-}y_2)=m(x\text{-}x_2)$
$(y\text{-}5)= (x\text{-}4)$
$y=x -4+5$
$y=x+1$

La representación de la misma recta en la forma ax+by=c será
De y=x+1,
y – x =1 o bien x-y=-1
Para graficar una recta dada en la representacion y=mx+b, se encuentra la ordenada al origen b, en el eje de las ordenadas y, de ahí se avanza a la derecha una unidad y se avanza hacia arriba o hacia debajo de acuerdo a su magnitud y al signo de la pendiente, hacia arriba si la pendiente es positiva y hacia abajo si es negativa

Ejemplos



a) y=2x+1 b) y= -2x+1

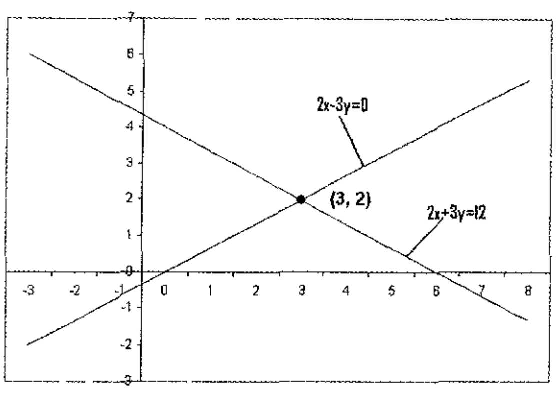
Si la recta está expresada mediante ecuación, basta evaluar dos puntos, ya que dos puntos determinan de manera única una recta
Ejemplos
2x-y=-1, esta recta pasa por los puntos (0,1) y (-1/2, 0), cuya gráfica corresponde al inciso a) del ejemplo anterior
La recta 2x+y=1, está definida por los puntos (0,1) y (1/2,0), y su gráfica es la del inciso b) del ejemplo anterior

0 4 La solución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas Desde la grafica de las rectas que representa cada ecuación hasta los métodos de solución

El siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$2x-3y=0$$
$$2x+3y=12$$

Cuya representación gráfica es la siguiente

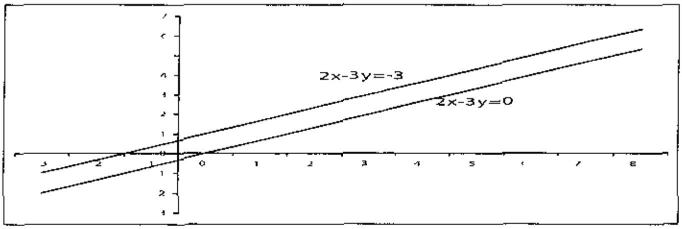


El punto de intersección (3,2) corresponde a la solución única del sistema Es decir, el punto donde se intersectan las dos rectas se llama *solución del sistema de ecuaciones lineales*, porque satisface las ecuaciones simultáneamente

El siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$2x-3y=0$$
$$2x-3y=-3$$

Cuya representación gráfica es la siguiente



No tienen solución porque no hay ningún punto de intersección de las rectas, debido a que son paralelas

Los métodos para encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas son
Suma y resta, sustitución y el método de Cramer

1 Suma y resta

Considere el sistema de ecuaciones

$$1\cdot\quad \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$$

Restar la ecuación 2 de la 1,

$$-\begin{array}{r} 2x-3y=0 \\ \underline{(2x+3y=12)} \end{array} \quad \text{o bien} \quad \begin{array}{r} 2x-3y=0 \\ \underline{-2x-3y=-12} \\ -6y=-12 \end{array}$$

Despejar la variable y $\qquad y=2$

Sustituir en cualquiera de las ecuaciones y despejar x

$$2x-3(2)=0 \Rightarrow \quad x=3$$

La solución es (3, 2)

2 - Sustitución

Considere el sistema de ecuaciones 1

De la primera ecuación despejar x

$$\begin{aligned} 2x-3y&=0 \\ 2x&=3y \\ x&=\frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Sustituir la variable x en términos de la variable y en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{3}{2}\right)y+3y&=12 \\ 6y&=12 \\ y&=2 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituir el valor de y en $x=\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}(2)=3$

La solución es (3,2)

3 El método de Cramer

Este método es apropiado para los sistemas de dos[1] ecuaciones con dos incógnitas

Un determinante general que se denota con la letra griega mayúscula delta (Δ) en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Es el número que resulta de hacer la siguiente operación con los coeficientes de las ecuaciones del sistema, es decir

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db$$

Los determinantes Δ_x y Δ_y se calculan al sustituir el lado derecho del sistema en la columna de *x* o *y* respectivamente

> La solución del sistema es. $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ siempre y cuando **$\Delta \neq 0$,** Si $\Delta = 0$ el sistema o no tiene solución porque son paralelas o tiene infinidad de soluciones porque es la misma recta

Considere el sistema

1 $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

Los tres determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2(-3) = 12$$

$$\Delta_x = \begin{matrix} 0 & -3 \\ 12 & 3 \end{matrix} = 0 \times 3 - 12(-3) = 36, \; \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 2 \times 12 - 2(0) = 24$$

1 Este metodo es apropiado para sistemas de *n* ecuaciones con *n* incognitas en esta seccion solo se ilustra para sistemas de dos ecuaciones con dos incognitas

La solución es

$$x = \frac{36}{12} = 3 \quad y = \frac{24}{12} = 2$$

Ejercicios 1

1 Encontrar las rectas que pasa por los siguientes pares de puntos (8,3) y (-1,-1), (3,-4) y (-2,2), (1,1) y (-2,3)

2 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas con dos variables
2 1 Graficar las rectas y encontrar una aproximación a la solución en la gráfica
2 2 Resolver con el método de suma y resta
2 3 Resolver con el método de sustitución
2 4 Resolver con el método de Cramer

1 2x - 3y = 4
-3x+2y = 6

2. −x + y = -5
9x -9y = 36

3 −3x + y = -15
9x -9y = 36

4 3x - 4y = 7
-6x + 8y = -14

5. (x-7)/(y+1) =3/2
2x + y = -3

6 (3/4)x - y= 8
x +(2/5)y= 2

7. -7x+10y = xy
14x - 5y = xy

8. 9/x + 8/y =-1
12/x - 7/y =15/2

9. 9x + 8y =-10
12x - 7y =15

10. 4/(x+5)-6/(y-2) = 4/3
3/(x+5)+18/(y-2)=7/2

I Introducción al álgebra lineal

El **Álgebra Lineal** es el área de la Matemática cuyo objetivo es resolver matricialmente sistemas de ecuaciones lineales Por ello el concepto central en dicha área es el de **matriz.**

Una **matriz** se define como un arreglo rectangular de números en **m** renglones y **n** columnas, donde **m**3 **n** indica la dimensión o tamaño de la matriz

Las formas más comunes para denotar una matriz son letras mayúsculas o letras minúsculas con doble subíndice entre paréntesis Los números que constituyen una matriz se suelen denominar **elementos**, que se pueden representar con letras minúsculas doble subíndice sin paréntesis El primer subíndice indica el renglón al que pertenece el elemento y el segundo identifica a la columna Para presentar todos los elementos de una matriz dada se pueden utilizar paréntesis curvos o rectangulares Una matriz de tamaño **m**₃ **n** es

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se define que dos matrices dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son **iguales** si para todo elemento de una y otra matriz se cumple que $a_{ij} = b_{ij}$ donde el primero es elemento del renglón i, columna j de la matriz $\mathbf{A}$ y el segundo es elemento del mismo renglón i, misma columna j en la matriz $\mathbf{B}$

II Matrices especiales

Una matriz **nula** es aquella en la que todos sus elementos son cero y se puede representar con **O**

Una matriz **identidad** **I** es una matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son '1' y los restantes son '0'

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & & \\ 0 & & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Una matriz **transpuesta,** que se denota por $\mathbf{A}^t$, se obtiene de intercambiar los renglones por las columnas de A, si A es de orden mxn con registros (a_{ij}), la matriz transpuesta será de orden nxm con registros (a_{ji})

$$\text{Si} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ & & \vdots \\ & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz **inversa $\mathbf{A}^{-1}$**

Dada una matriz A matriz cuadrada su inversa A^{-1} (si existe) es aquella tal que

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

Propiedades de la inversa

Dada una matriz cuadrada A

1 La inversa de su inversa es ella misma $[A^{-1}]^{-1}=A$
2 La inversa de la transpuesta de A es la transpuesta de la inversa $[A^t]^{-1}=[A^{-1}]$
3 Si se premultiplica por otra matriz cuadrada B la inversa de la matriz producto $[AB]^{-1}$ es el producto intercambiado de las respectivas inversas $B^{-1}A^{-1}$
4 El determinante de su inversa es el recíproco de su determinante $|A^{-1}| = 1/|A|$

III Operaciones matriciales

Existen tres operaciones entre matrices adición, **multiplicación** por un número **k** y **producto matricial**

Adición

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \left(a_{ij}+b_{ij}\right) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplicación por un número **k**

$$k\,\mathbf{A} = \left(k\,a_{ij}\right) = \begin{bmatrix} k\,a_{11} & \cdots & k\,a_{1n} \\ \vdots & k\,a_{ij} & . \\ k\,a_{m1} & \cdots & k\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

Producto matricial

$$\mathbf{A}_{m\times p}\,\mathbf{B}_{p\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1p} \\ & \\ a_{m1} & a_{mp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ b_{p1} & b_{pn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1p}b_{p1} & & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1p}b_{pn} \\ & a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{ip}b_{pj} & \\ a_{m1}b_{11}+\cdots+a_{mp}b_{p1} & & a_{m1}b_{1n}+\cdots+a_{mp}b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{m\times p}\,\mathbf{B}_{p\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

donde cada c_{ij} es la suma de productos de cada elemento del renglón i de **A** por el correspondiente elemento j de **B**

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \left(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}\right)$$

Estos productos se conocen como **producto punto** o **producto interior.**

El concepto de matriz y las operaciones matriciales sirven para presentar en forma sistematizada conjuntos de datos o para obtener resultados a partir del manejo matricial de tales conjuntos

<u>Ejercicios 2</u>

1 - Considerar las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcular a) A-2B, b) 3A-C, c) BA, d) CBA

2 - Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}0 & -3\\1 & 2\\4 & 6\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\-2 & 5\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\5 & 3 & 2\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix}6 & 2 & 1\\-1 & 0 & 5\\7 & -6 & 0\end{bmatrix}$

Calcular

a) AB, b) $D+E$, c) $E-D$, d) ED,

e) DE, f) $-5B$, g) D^2+E, h) $A(BC)$

i) ED^t, j) $(A+C^t)$ k) $(E+D)^2$ l) $E^2+2ED+D^2$

III.1 Aplicación de las operaciones matriciales

Ejemplo 1

Seis pasantes de licenciatura necesitan fotocopiar el original de sus tesis y cada uno debe entregar 15 ejemplares Se consiguió que un servicio de fotocopiado les cobrara \$0 30 por hoja en blanco y negro, y \$8 00 por hoja a color El total de hojas por tesis es

	Número de hojas	
Pasante	B/N	Color
I	70	10
II	56	20
III	25	40
IV	100	8
V	85	15
VI	94	10

Determinar cuánto debe pagar cada pasante

Para abordar este problema el primer paso es constituir las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}70 & 10\\56 & 20\\25 & 40\\100 & 8\\85 & 15\\94 & 10\end{bmatrix} \quad \text{matriz del número de hojas} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix} \quad \text{matriz de precios}$$

El segundo paso consiste en multiplicar esas matrices

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 70 & 10 \\ 56 & 20 \\ 25 & 40 \\ 100 & 8 \\ 85 & 15 \\ 94 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 \\ 176\ 5 \\ 327.5 \\ 94 \\ 145\ 5 \\ 108\ 2 \end{bmatrix}$$

La matriz resultante es la matriz de costos por una copia por tesis para cada pasante En consecuencia, lo que debe pagar cada uno está dado por el siguiente producto

$$15 \begin{bmatrix} 101 \\ 176\ 5 \\ 327\ 5 \\ 94 \\ 145\ 5 \\ 108\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \$ \\ \begin{bmatrix} 1515 \\ 2652 \\ 4912\ 5 \\ 1410 \\ 2182\ 5 \\ 1623 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 2

Un grupo de cinco amigos fueron a comer tacos En la taquería, a cada uno le entregaron una hoja impresa donde debían anotar si querían tacos o tortas u otro tipo de alimento y qué bebida deseaban Al dueño del lugar le interesa tener en pantalla un formato que le permita determinar la cuenta de cada cliente y la cuenta total por mesa una vez que se registre cada pedido individual

La hoja de orden tiene las siguientes columnas

Alimento	Cantidad	Precio
TACOS	X	$
TORTAS		
ENSALADAS		
POSTRES		
BEBIDAS	X	$

La orden fue

Cliente	Al pastor	De bistec	De chuleta	De costilla	alambre	Refresco	Agua
Amigo 1	3	2	1	-	-	-	2
Amigo 2	2	2	1	2	-	2	-
Amigo 3	2	1	1	1	1	1	1
Amigo 4	5	1	-	1	-	2	-
Amigo 5	2	-	2	1	1	-	3

Los precios correspondientes son

	Al pastor	De bistec	De chuleta	De costilla	alambre	Refresco	Agua
$	10	15	11	20	50	12	10

Para saber cuánto tiene que pagar cada uno de los amigos se constituye una matriz cliente /alimento y se post-multiplica por una matriz columna de precios

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de clientes/alimentos} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 11 \\ 20 \\ 50 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de precios}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 11 \\ 20 \\ 50 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$\ 91 \\ 125 \\ 138 \\ 109 \\ 142 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de consumos}$$

III.2 Matrices y gráficas de relaciones sociológicas

Entre las personas se dan varios tipos de interrelación así como de patrones de comportamiento La teoría matricial puede ser aplicada para modelar tales patrones Entre las relaciones más comunes están las siguientes

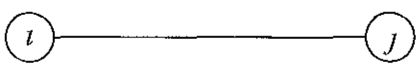
1 Relaciones de comunicación una persona desea o no hablar con otra persona
2 Relaciones de dominación una persona domina o es dominada por otra persona

Éstas se pueden representar mediante las denominadas **matrices de relaciones,** cuyos elementos son binarios puesto que

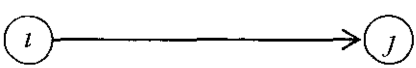
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ tiene relación con } j \\ 0 & \text{si } i \text{ no tiene relación con } j \end{cases}$$

Otra forma de representar tales relaciones es a través de una gráfica Una gráfica G(N, A) consiste de un par de conjuntos, N es el conjunto de nodos y A el conjunto de aristas que unen a cada par de nodos

La arista (i,j) es la que une al nodo i con el nodo j y se representa así



Si una arista tiene dirección se representa



De esta manera, una gráfica dirigida tiene nodos y flechas

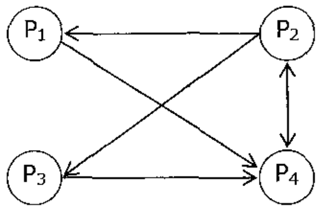
Nótese que una matriz de relaciones y una gráfica dirigida son equivalentes

Ejemplo 3

Supóngase un grupo de cuatro personas que se comunican entre sí de manera tal que la persona i entra en contacto con la persona j, ello significa que $a_{ij}=1$, en caso contrario $a_{ij}=0$ La comunicación entre esas cuatro personas está dada por la siguiente matriz

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La gráfica dirigida que corresponde a esta matriz es



Obsérvese que en esta gráfica dirigida, las comunicaciones directas son $p_1 \rightarrow p_4$, $p_2 \rightarrow p_1$, $p_2 \rightarrow p_3$, $p_2 \rightarrow p_4$, $p_3 \rightarrow p_4$ y $p_4 \rightarrow p_2$ y nótese que entre p_2 y p_4 hay comunicación en ambos sentidos

En la misma gráfica dirigida se puede observar que p_3 puede comunicarse con p_2 a través de p_4 y con p_1 a través de p_4 y p_2
El número de comunicaciones entre cada par de personas habiendo un intermediario, se determina multiplicando la matriz A por sí misma, es decir

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, las comunicaciones entre pares de personas con un intermediario son

De p_i a p_j	Inicial		intermediario		final
$p_1 \rightarrow p_2$	p_1	$\rightarrow$	p_4	$\rightarrow$	p_2
$p_2 \rightarrow p_2$	p_2	$\rightarrow$	p_4	$\rightarrow$	p_2
$p_2 \rightarrow p_4$	p_2	$\rightarrow$	p_1	$\rightarrow$	p_4
	p_2	$\rightarrow$	p_3	$\rightarrow$	p_4
$p_3 \rightarrow p_2$	p_3	$\rightarrow$	p_4	$\rightarrow$	p_2
$p_4 \rightarrow p_1$	p_4	$\rightarrow$	p_2	$\rightarrow$	p_1
$p_4 \rightarrow p_3$	p_4	$\rightarrow$	p_2	$\rightarrow$	p_3
$p_4 \rightarrow p_4$	p_4	$\rightarrow$	p_2	$\rightarrow$	p_4

p_2 y p_4 aparecen en los siete casos presentados, por lo que se puede concluir que esas dos personas son las que tienen mejores perspectivas de comunicarse

En forma análoga, para establecer el número de formas de comunicación entre pares de personas con dos intermediarios basta calcular A^3

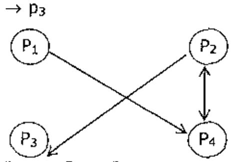
$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La lista de comunicaciones entre pares de personas con dos intermediarios es

De p_i a p_j	inicial		intermediarios		final
$p_1 \to p_1$	p_1	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_1
$p_1 \to p_3$	p_1	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_3
$p_1 \to p_4$	p_1	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_4
$p_2 \to p_1$	p_2	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_1
$p_2 \to p_2$	p_2	$\to$	$p_1 \to p_4$	$\to$	p_2
	p_2	$\to$	$p_3 \to p_4$	$\to$	p_2
$p_2 \to p_3$	p_2	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_3
$p_2 \to p_4$	p_2	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_4
$p_3 \to p_1$	p_3	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_1
$p_3 \to p_3$	p_3	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_3
$p_3 \to p_4$	p_3	$\to$	$p_4 \to p_2$	$\to$	p_4
$p_4 \to p_2$	p_4	$\to$	$p_2 \to p_4$	$\to$	p_2
$p_4 \to p_4$	p_4	$\to$	$p_2 \to p_1$	$\to$	p_4
	p_4	$\to$	$p_2 \to p_3$	$\to$	p_4

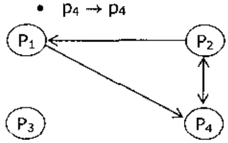
Estas formas de comunicación están en la gráfica presentada y se pueden extraer como subgráficas A manera de ejemplo se presentan los dos casos.

- $p_1 \to p_3$

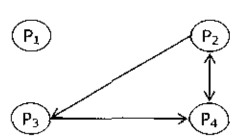


$p_1 \to p_4 \to p_2 \to p_3$

- $p_4 \to p_4$



$p_4 \to p_2 \to p_1 \to p_4$



$p_4 \to p_2 \to p_3 \to p_4$

Visualmente se puede verificar que estas subgráficas están contenidas en la gráfica original

Ejemplo 4

El tipo de relación presentado en el ejemplo 4 es distinto al que ocurre en una relación de dominación En aquel, si una persona P está en relación con otra persona Q, ésta puede estar o no en relación con P En cambio, en las relaciones de dominación si P domina a Q, entonces Q no puede dominar a P Es decir, en esta clase de relaciones no puede haber reciprocidad

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ domina a } j \\ 0 & \text{si } i \text{ no domina a } j \end{cases}$$

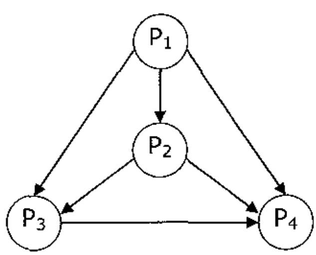
Si $a_{ij} = 1$ implica $a_{ji} = 0$ y viceversa $a_{ij} = 0$ implica $a_{ji} = 1$
Para que una matriz represente una relación de dominación se debe cumplir que

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & & 0 & & 1 \\ & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \end{bmatrix}$$

La gráfica dirigida de una matriz de este tipo no puede contener segmentos con doble flecha
Considérese una matriz que represente las interrelaciones entre cuatro personas

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La gráfica respectiva es



La transpuesta de la matriz A es

$$\mathbf{A}^t \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y por lo tanto, A + A^t resulta

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^t \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La confirmación algebraica de que hay relaciones de dominación entre esas cuatro personas como lo indica la gráfica presentada es que la suma de la matriz inicial y su transpuesta sea una matriz donde todos los registros de la diagonal principal son 0 y los restantes 1

Ejemplo 5
Supongase un primer grupo de cuatro personas que se infectaron con el virus de influenza y que tuvo contacto con un segundo grupo de tres personas Éstas a su vez entraron en contacto con un tercer grupo de cinco personas Se trata de establecer si estas cinco personas contrajeron la enfermedad a través del segundo grupo

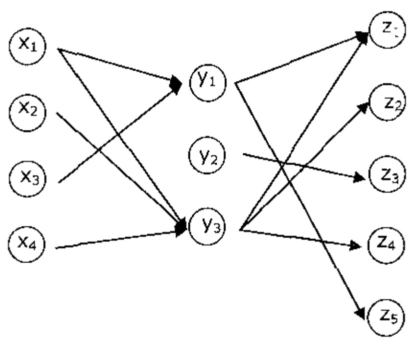
Si A es la matriz de contacto entre el primer grupo con el segundo y B la matriz de contacto entre el segundo con el tercero

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

El producto de las matrices anteriores indica el número de formas de contacto entre las personas del primer grupo y las del tercero a través del segundo grupo

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Expresado con gráfica



La interpretación es la siguiente

La persona x_1 del primer grupo contagiará a la persona z_1 del tercer grupo por dos formas $x_1 \to y_1 \to z_1$, $x_1 \to y_3 \to z_1$, y de una sola forma a z_2, z_4 y z_5 es decir $x_1 \to y_3 \to z_2$, $x_1 \to y_3 \to z_4$, $x_1 \to y_3 \to z_5$

La persona x_2 del primer grupo contagiará a las personas z_1, z_2 y z_4 de la siguiente manera $x_2 \to y_3 \to z_1$, $x_2 \to y_3 \to z_2$, $x_2 \to y_3 \to z_4$

La persona x_3 del primer grupo sólo contagiará a las personas z_1, y z_4 de la siguiente manera $x_3 \to y_1 \to z_1$ y $x_3 \to y_3 \to z_4$

La persona x_4 del primer grupo contagiará a las personas z_1, z_2 y z_4 de la siguiente manera $x_4 \to y_3 \to z_1$, $x_4 \to y_3 \to z_2$, $x_4 \to y_3 \to z_4$

Las sumas de las columnas nos indican cuántos contagios recibieron cada una de las personas del tercer grupo, z_1 tiene cinco posibles contagios, z_2, y z_4 tienen tres posibles contagios respectivamente, z_5 dos posibles contagios, mientras que z_3 no tiene contagio, porque el único contacto que tienen es con y_2 y éste no tuvo contacto con ninguna persona del grupo uno

Las sumas de los renglones indican a cuántos y de cuántas formas contagiaron las personas del grupo uno a las personas del grupo tres

III.3 Matrices de Markov

Los procesos de Markov[2] se utilizan para modelar situaciones que describen clases o estados separados, de manera que el sistema esté en un solo estado cada vez y que se conozca o pueda determinar la probabilidad de pasar de un estado a otro

Situaciones cuyo comportamiento se puede modelar como un proceso de Markov

- Comportamiento de los clientes que pueden comprar entre las marcas A, B o C Un cliente puede comprar la marca A, B o C, pero una compra comprenderá sólo una de las marcas Si la compra de una marca depende exclusivamente de la compra más reciente y no de las anteriores
- El comportamiento de una máquina, que puede estar en un estado de ajustada o desajustada, con probabilidad de pasar de un estado a otro cada vez
- Análisis de cuentas por cobrar con estados de cuentas saldadas, insolutas, vencidas y cuentas perdidas
- Cambios del clima
- Para la planificación escolar con el fin de determinar la cantidad probable de alumnos que se graduarán, el porcentaje de deserción, el porcentaje de aprobación y de reprobación

Los procesos de Markov se caracterizan por

- Tener un conjunto de estados e_1, e_2, e_3, ,e_n o bien estados {1,2,3 i j n } que ocurren en tiempos constantes
- La probabilidad de encontrarse en el estado i en el tiempo t S_i con $\sum_i S_i = 1$
- Las probabilidades de transición del estado i al j p_{ij} con $\sum_j p_{ij} = 1$
- La matriz de transición $[p_{ij}]$
- El vector de probabilidades de estado en el periodo t S(t)

Se pueden calcular las probabilidades de que un sistema se encuentre en un cierto estado después de *n* periodos partiendo de un estado inicial con

$$S(t+1) = S(t)P$$
$$S(1) = S(0)P$$
$$S(2) = S(1)P = S(0)PxP = S(0)P^2$$
$$S(n) = S(n-1)P = S(0)P^n$$

2 Recibe su nombre del matematico **Andréi Andréyevich Markov** (1856 -1922)

Ejemplo 6

En un proceso electoral se presentaron cuatro partidos, A, B, C y D, la distribución de los votos en una de las casillas para los cuatro partidos se muestran en la siguiente tabla, para los años 2003 y 2006

La interpretación de los números es de los 20 votos que el partido A tuvo en 2003, en 2006 1 fue para el partido A, 11 para B, 2 para C y 6 para el partido D

		Votaciones 2006				TOTAL
		A	B	C	D	
Votaciones 2003	A	1	11	2	6	20
	B	13	100	25	40	178
	C	3	32	5	4	44
	D	4	37	7	10	58

Cuya matriz de transición es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0\ 05 & 0\ 55 & 0\ 1 & 0\ 3 \\ 0\ 07 & 0.56 & 0\ 14 & 0\ 22 \\ 0\ 07 & 0\ 73 & 0\ 11 & 0\ 09 \\ 0\ 07 & 0\ 64 & 0\ 12 & 0\ 17 \end{bmatrix}$$

Que se construye dividiendo cada elemento de la matriz de datos entre la suma del renglon respectivo, por ejemplo 1/20 = 0 05 es la probabilidad de que un voto de A en 2003 se repita en 2006 para A La probabilidad de cambiar del partido A al B es 11/20 = 0 55 y así sucesivamente se construye la matriz de transición

Si se tiene un vector de votaciones inicial

$$\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 21 & 180 & 39 & 60 \end{bmatrix}$$

Donde las entradas son los votos de cada partido, es decir, 21 votos por A, 180 por B, 39 votan por C y 60 por D

Se espera que para el siguiente período se obtenga la siguiente distribución de votos por partido

$$\mathbf{x(1)} = \mathbf{x(0)T} = \begin{bmatrix} 21 & 180 & 39 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0\ 05 & 0\ 55 & 0\ 1 & 0.3 \\ 0\ 07 & 0\ 56 & 0\ 14 & 0\ 22 \\ 0\ 07 & 0\ 73 & 0\ 11 & 0\ 09 \\ 0\ 07 & 0\ 64 & 0\ 12 & 0\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 179 & 39 & 61 \end{bmatrix}$$

Para el siguiente periodo de votaciones se espera que el partido A repita con 21 votos, el B baja un voto, con 179 y los partidos C y D se mantienen

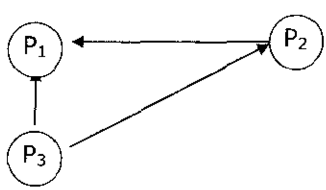
Ejercicios 3 Problemas propuestos

1 En un restaurante chino hay 6 menús y 5 meseros Cada mesero sirvió cantidades diferentes de los menús, como se muestra en la tabla Los precios correspondientes de cada menú son

Menú	A	B	C	D	E	F
precio	100	150	115	200	250	120

¿A cuánto ascendió la cuenta que cada mesero recaudó?

2 Supóngase un grupo de tres personas que se comunican entre sí, de manera tal que la persona ***i*** entra en contacto con la persona ***j***, ello significa que $a_{ij}=1$, en caso contrario $a_{ij}=0$ La comunicación entre esas cuatro personas está dada por la siguiente gráfica dirigida



a Construye la matriz asociada a esta gráfica
b Obtén todos los contactos directos
c Obtén los contactos que utilizan un intermediario
d Obtén los contactos que utilizan dos intermediarios

3 Repite el ejercicio anterior con el grupo de tus amigos

4 Considera la gráfica del ejercicio anterior ¿existe relación de dominación?

5

6 Supóngase un primer grupo de tres personas que se infectaron con un virus y que tuvo contacto con un segundo grupo de tres personas Éstas a su vez entraron en contacto con un tercer grupo de cuatro

personas Se trata de establecer si estas cuatro personas contrajeron la enfermedad a través del segundo grupo

Si A es la matriz de contacto entre el primer grupo con el segundo y B la matriz de contacto entre el segundo con el tercero

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Indica el número de formas de contacto entre las personas del primer grupo y las del tercero a través del segundo grupo y exprésalo en una gráfica

Un estudio ha determinado que la ocupación de un niño, cuando sea adulto, depende de la ocupación de su padre y está dada por la siguiente matriz de transición, donde

P = profesionista, F= agricultor, L= trabajador

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textit{estados} & P & F & L \end{array} \\ \textit{ocupación del hijo} = & \begin{array}{c} P \\ F \\ L \end{array}\begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ .2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Así, la probabilidad de que el hijo de un profesionista sea un profesionista es 8

¿Cuál es la probabilidad de que el nieto de un profesionista también sea un profesionista?

A largo plazo ¿qué proporción de la poblacion será trabajadora?

Supóngase un vector de estado inicial de S(0) =[0 5, 0 2, 0 3]

IV Operaciones elementales de renglones de una matriz y escalonamiento de matrices

Una matriz se puede transformar en matrices equivalentes mediante lo que se conoce como operaciones elementales de renglón Tales operaciones son

a) Intercambio de renglones
b) Multiplicación de un renglon por una constante distinta de cero
c) Suma de un renglón multiplicado por una constante distinta de cero a cualquier otro renglón

El objetivo es transformar una matriz dada en una matriz tal que[3]

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

Los registros restantes pueden ser cualquier otro número
Ese procedimiento está constituido de m iteraciones
Iteracion 1

1. $\hat{R}_{1piv} = \dfrac{1}{a_{11}} R_1$
2. $\hat{R}_k = R_k - a_{k1}\hat{R}_{1piv} \quad \text{para} \quad k = 2, \ldots, m$

Iteración 2

1. $\hat{R}_{2piv} = \dfrac{1}{a_{22}} R_1$
2. $\hat{R}_k = R_k - a_{k2}\hat{R}_{2piv} \quad \text{para} \quad k = 3, \ldots, m$

Iteración j

1. $\hat{R}_{ipiv} = \dfrac{1}{a_{ii}} R_i$
2. $\hat{R}_k = R_k - a_{ki}\hat{R}_{ipiv} \quad \text{para} \quad k = i+1, \ldots, m$.

[3] Si la matriz A es cuadrada (igual numero de renglones que de columnas) la expresion es una matriz $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$ triangular superior $\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Si la matriz es de orden general, la matriz equivalente se denomina escalonada y puede tener la formas $\begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & s & t & f & g \\ 0 & 1 & r & w & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 7

Por medio de operaciones elementales de renglones de una matriz, determine las matrices escalonadas equivalentes a las siguientes matrices

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 14 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\hat{R}_2=R_1]{\hat{R}_1=R_2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\hat{R}_3=R_3-(-1)\hat{R}_{1\,piv}]{\hat{R}_{1\,piv}=\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\hat{R}_{3\,piv}=\frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{1\,piv}=\frac{1}{10}R_1 \\ \hat{R}_2=R_2-(1)\hat{R}_{1\,piv} \\ \hat{R}_3=R_3-(2)\hat{R}_{1\,piv} \\ \hat{R}_4=R_4-(2)\hat{R}_{1\,piv}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & -4 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\hat{R}_{2\,piv}=\left(-\frac{1}{6}\right)R_2 \\ \hat{R}_3=R_3-(4)\hat{R}_{2\,piv} \\ \hat{R}_4=R_4-(-4)\hat{R}_{2\,piv}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{3\,piv}=\left(-\frac{1}{10}\right)R_3 \\ \hat{R}_4=R_4-\left(-\frac{23}{3}\right)\hat{R}_{3\,piv}}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{1\,piv}=\frac{1}{8}R_1 \\ \hat{R}_2=R_2-(-1)\hat{R}_{1\,piv} \\ \hat{R}_3=R_3-(2)\hat{R}_{1\,piv}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{2\,piv}=\left(-\frac{4}{3}\right)R_2 \\ \hat{R}_3=R_3-\left(-\frac{1}{2}\right)\hat{R}_{2\,piv}}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios 4

1.- Por medio de operaciones elementales de renglones de una matriz, determine las matrices escalonadas equivalentes a las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

V Sistemas de ecuaciones lineales

Supóngase que en el caso antes mencionado de los seis pasantes de licenciatura se les dio el presupuesto por un ejemplar, ellos desean saber cuál será el costo por copia en blanco y negro, y cuánto por copia a color

$$\begin{bmatrix} 101 \\ 176\ 5 \\ 327\ 5 \\ 94 \\ 145\ 5 \\ 108\ 2 \end{bmatrix}$$

El problema que ahora se plantea es

$$\mathbf{A}x = \begin{bmatrix} 70 & 10 \\ 56 & 20 \\ 25 & 40 \\ 100 & 8 \\ 85 & 15 \\ 94 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 \\ 176\ 5 \\ 327\ 5 \\ 94 \\ 145\ 5 \\ 108\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde A es la matriz de número de hojas por tesis, clasificadas en copias en blanco y negro y en color
Si se hace la multiplicación se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 70x_1+10x_2 &= 101 \\ 56x_1+20x_2 &= 176\ 5 \\ 25x_1+40x_2 &= 327\ 5 \\ 100x_1+8x_2 &= 94 \\ 85x_1+15x_2 &= 145\ 5 \\ 94x_1+10x_2 &= 108\ 2 \end{aligned}$$

El resultado de la multiplicación es un sistema de ecuaciones lineales de seis ecuaciones con dos incógnitas o variables

Un sistema de ecuaciones lineales tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \quad + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{m1}x_1 + \quad + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Que en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

O bien

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

En los sistemas de ecuaciones lineales puede ocurrir que:

1. **Haya solución única.**
2. **Haya infinidad de soluciones.**
3. **No tenga solución.**

En los primeros dos casos se dice que el sistema es consistente y si ocurre el tercero el sistema es inconsistente.

VI Métodos matriciales de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Los métodos que se presentan a continuación son de carácter general, es decir, se pueden utilizar para resolver cualquier sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ donde la matriz es de orden nxm Para los sistemas con matrices cuadradas, de orden nxn, además de estos métodos, existen otros que aprovechan las características de las matrices cuadradas

VI.1 Eliminación de Gauss y sustitución regresiva

Dado un sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Construir la matriz aumentada, donde el lado izquierdo corresponde a la matriz A y el derecho al vector b de resultados del sistema

$$[\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}]$$

Por medio de operaciones elementales de renglón dicha matriz se transforma hasta llegar a una matriz equivalente escalonada

$$[\mathbf{E} \,|\, \mathbf{k}]$$

Donde E es una matriz escalonada (triangular superior) y cada elemento de esta matriz es

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i > j \\ r \in R & si \quad i < j \end{cases}$$

La matriz aumentada **[E | b']** expresada como sistema de ecuaciones es

$$\begin{array}{l} x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + \quad + e_{1n}x_n = k_1 \\ 0 \quad x_2 + e_{23}x_3 + \quad + e_{2n}x_n = k_2 \\ 0 \; 0 \quad x_3 + \quad + e_{3n}x_n = k_3 \\ \\ 0 \; 0 \quad\quad 0 \quad x_n = k_m \end{array}$$

A partir del sistema anterior se procede a efectuar la sustitución regresiva, es decir, como

$$x_n = k_m$$

este valor se sustituye en la ecuación inmediata anterior

de modo que $$x_{n-1} + e_{m-1}x_n = k_{m-1}$$

y así sucesivamente

VI.2 Eliminación Gauss – Jordan

En el proceso de eliminación de Gauss-Jordan se repiten los dos primeros pasos de la eliminación gaussiana, y la transformación de la matriz por medio de operaciones elementales en los renglones de la matriz es

$$[\mathbf{E}\,|\,\mathbf{k}]$$

Donde

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

En la submatriz izquierda aparecen las variables y en la submatriz derecha aparecen las soluciones

Ejemplo 8

a) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

Mediante operaciones elementales de renglón sobre la matriz aumentada se tiene la siguiente sucesión de matrices equivalentes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 1 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_1 = R_2 \\ \hat{R}_2 = R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 4 & 6 & 18 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{1\,piv} = R_1 \\ \hat{R}_2 = R_2 - (2)\hat{R}_{1\,piv} \\ \hat{R}_3 = R_3 - (3)\hat{R}_{1\,piv}}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 0 & -6 & -6 & -30 \\ 0 & -14 & -20 & -68 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{2\,piv} = -\frac{1}{6}R_2 \\ \hat{R}_3 = R_3 - (-14)\hat{R}_{2\,piv}}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\hat{R}_{3\,piv}=-\frac{1}{6}R_3}\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Esta última matriz corresponde al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x + 5y + 6z &= 24 \\ y + z &= 5 \\ z &= -1/3 \end{aligned}$$

Por sustitución regresiva se tiene

$z = - 1/3$

$y - 1/3 = 5$, $y = 16/3$

$x + 5(16/3) + 6(-1/3) = 24$, $x + 74/3 = 24$, $x = - 2/3$

Por lo tanto, el sistema tiene solución única

$$\boxed{x = - 2/3;\ y = 16/3\ ;\ z = - 1/3}$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 2(-2/3) + 4(16/3) + 6(-1/3) &= 54/3 = 18 \\ (-2/3) + 5(16/3) + 6(-1/3) &= 72/3 = 24 \\ 3(-2/3) + (16/3) - 2(-1/3) &= 12/3 = 4 \end{aligned}$$

b) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 9 \\ x + 6y &= 12 \\ 3x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 12 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right]$

Nuevamente, mediante operaciones elementales de renglón sobre la matriz aumentada se tiene la siguiente sucesión de matrices equivalentes

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 12 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\hat{R}_2 = R_1]{\hat{R}_1 = R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\hat{R}_2 = R_2 - (2)\hat{R}_{1\,piv} \\ \hat{R}_3 = R_3 - (3)\hat{R}_{1\,piv}}]{\hat{R}_{1\,piv} = R_1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & -6 & -15 \\ 0 & -20 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\hat{R}_3 = R_3 - (-20)\hat{R}_{2\,piv}]{\hat{R}_{2\,piv} = -\frac{1}{6}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 5\ 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

En términos de
ecuaciones resulta

$$x + 6y = 12$$
$$y = 5/2$$
$$0 = 16 \text{ ¡!!}$$

c) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$2x + 4y + 6z = 9$
$3x + y - 2z = 2$

La matriz aumentada es: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right]$

Una vez más se aplica a esta matriz el procedimiento de operaciones elementales de renglón

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\hat{R}_2 = R_2 - (3)\hat{R}_{1\,piv}]{\hat{R}_{1\,piv} = \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9\ 2 \\ 0 & -5 & -11 & -23\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\hat{R}_1 = R_1 - (2)\hat{R}_{2\,piv}]{\hat{R}_{2\,piv} = -\frac{1}{5}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7\ 5 & -1\ 10 \\ 0 & 1 & 11\ 5 & 23\ 10 \end{bmatrix}$$

Esta matriz expresada como sistema de ecuaciones

$$x \quad - \frac{7}{5}z = -\frac{1}{10}$$
$$y + \frac{11}{5}z = \frac{23}{10}$$

por lo tanto la solución es:

$$x = -\frac{1}{10} + \frac{7}{5}z$$
$$y = \frac{23}{10} - \frac{11}{5}z$$
$$z = t$$

donde $t \in$ **R** (conjunto de los números reales).

Esto significa que este sistema tiene infinidad de soluciones porque los valores de las variables ***x, y*** dependen del valor que se asigne a la variable z Por ejemplo si z = 0 entonces, ***x*** = -1/10, ***y*** = 23/10

A partir de los ejemplos anteriores conviene observar que

Dado el sistema Ax=b

- Si m>n
  - Si al menos el último renglón es nulo, el sistema tiene solución única y el sistema es consistente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La solución de este sistema es única:
x= 6, y = 1

  - Si el último renglón de la matriz ampliada reducida es no nulo el sistema no tiene solución, y el sistema es inconsistente

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 5\ 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

El último renglón es no nulo e indica que
0= 16 ¡!!
lo cual es imposible.

- Si m<n
  - Si el último renglón de la matriz ampliada reducida no es nulo ni en la parte de la matriz ni en el lado derecho, el sistema tiene infinidad de soluciones y es consistente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/5 & -1/10 \\ 0 & 1 & 11/5 & 23/10 \end{array}\right]$$

La solución es infinita:
x= -1/10+7/5 z; y = 23/10 -11/5 z;
z = t $t \in$ **R.**

- Si al menos el último renglón es totalmente nulo, el sistema tiene infinidad de soluciones y es consistente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es infinita·
x= 10- 2w, y = 15 -3w-2z;
z = t, w= s s,t$\in$ **R**.

Si dicho renglón es no nulo el sistema no tiene solución y el sistema es inconsistente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

El último renglón es no nulo e indica que 0=6 ¡! Imposible.

- Si m=n
  - El sistema tiene solución única si los elementos de la diagonal principal son igual a uno y el sistema es consistente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La solución es única
x=-2, y=4, z=1.

  - Habrá infinidad de soluciones cuando el último renglón sea nulo, el sistema es consistente

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es infinita.
x= 21-5z; y = 5-z; z = t, t$\in$ **R**

  - No tendrá solución cuando en dicho renglón el elemento de la parte derecha en la matriz ampliada reducida sea distinto de cero Y el sistema es inconsistente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El último renglón es no nulo e indica que
0=1 ¡! Es imposible

Ejercicios 5

Resolver mediante el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

1) $\begin{aligned} 2x + 6y - 4z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 1 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x + 3y - 3z &= -5 \\ 2x - y + z &= -3 \\ -6x + 3y - 3z &= 4 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 3x + 2y - z &= -5 \\ 5x - 2y + z &= 1 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 4x - 2y + z &= -4 \\ x + 3y - 2z &= 7 \\ 10x - y + z &= 12 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x &= -1 + 4y \\ 3x - 2y &= z \\ x + y &= 3 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - 3y &= 7 \\ 3x + 2y &= 8 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 2x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x + 3y - 3z &= -5 \\ 2x - y + z &= -3 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 8x + 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 8 \\ 4x - 2y &= -4 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 0 \\ 10x - y + z &= 0 \end{aligned}$

VI.3 Cálculo de la matríz inversa por medio de operaciones elementales en los renglones de una matriz

La matrız ınversa A^{-1} (sı exıste) de una matrız cuadrada A es aquella que $A^{-1}A = I = AA^{-1}$

Una manera de calcular la ınversa de una matrız es por medıo de operacıones elementales en los renglones de la matrız, es decır

$$[A\ |I] \xrightarrow{\substack{\textit{operaciones} \\ \textit{elementales} \\ \textit{en los renglones} \\ \textit{de la matriz}}} [I\ |A^{-1}]$$

Donde A^{-1} es la ınversa de la matrız (sı exıste)

Ejemplo 9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\hat{R}_1 = R_2 \\ \hat{R}_2 = R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\hat{R}_{1\,piv} = R_1 \\ \hat{R}_2 = R_2 - (2)\hat{R}_{1\,piv} \\ \hat{R}_3 = R_3 - (2)\hat{R}_{1\,piv}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\hat{R}_{2\,piv} = \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7\ 5 & 1\ 5 & -2\ 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\hat{R}_1 = R_1 - (-1)\hat{R}_{2\,piv} \\ \hat{R}_3 = R_3 - (2)\hat{R}_{2\,piv}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13\ 5 & 1\ 5 & 3\ 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7\ 5 & 1\ 5 & -2\ 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6\ 5 & -2\ 5 & -6\ 5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\hat{R}_{3\,piv} = -\frac{5}{6}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13\ 5 & 1\ 5 & 3\ 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7\ 5 & 1\ 5 & -2\ 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1\ 3 & 1 & -5\ 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\hat{R}_3=R_3-(2)\hat{R}_{2\,piv}]{\hat{R}_1=R_1-(-1)\hat{R}_{2\,piv}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\;3 & -2 & 13\;6 \\ 0 & 1 & 0 & 2\;3 & 1 & -7\;6 \\ 0 & 0 & 1 & 1\;3 & 1 & -5\;6 \end{bmatrix}$$

Comprobación $A^{-1}xA=I$

$$\begin{bmatrix} -2/3 & -2 & 13/6 \\ 2/3 & 1 & -7/6 \\ 1/3 & 1 & -5/6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz no tiene inversa, este método de eliminación conduce a que se elimine un renglón de la matriz aumentada en la parte donde se encuentra la matriz A

$$\hat{R}_{1\,piv}=R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\hat{R}_3=R_3-(3)\hat{R}_{1\,piv}]{\hat{R}_2=R_2-(2)\hat{R}_{1\,piv}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ya no hay posibilidad de “hacer” unos y ceros en la parte izquierda de esta matriz aumentada

Por lo tanto la matriz no tiene inversa

<u>Ejercicios 6</u>

Calcular la inversa de las siguientes matrices con el método de eliminación de Gauss-Jordan

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Una manera de ver si una matriz cuadrada tiene o no inversa es a partir de calcular su determinante, tema que se ve en la siguiente sección

VII Sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas y ecuaciones

Cuando los sistemas tienen igual número de ecuaciones que de incógnitas se pueden resolver así

$$Ax=b$$
$$x= A^{-1}b$$

Si A^{-1} existe
Para ver si existe la inversa se determina su determinante, si éste es diferente de cero, entonces A^{-1} existe

VI.1 Determinantes

Definición: Es un número real asociado a toda matriz cuadrada
Dada una matriz cuadrada A su determinante se denota como

$$\text{Det } A \text{ o } |A|$$

Para el caso de una matriz de orden 2x2, su determinante se calcula de la siguiente manera

Dada la matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ el determinante es $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ o sea

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} -a_{21}a_{12} \\ +a_{11}a_{22} \end{matrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Para el caso de una matriz de orden 3x3 su determinante se calcula de la siguiente manera

Dada la matriz de orden (3x3) A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ el determinante es

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Para su cálculo se le agregan los dos primeros renglones

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{array}{l} -a_{31}a_{22}a_{13} \\ -a_{11}a_{32}a_{23} \\ -a_{21}a_{12}a_{33} \\ +a_{11}a_{22}a_{33} \\ +a_{21}a_{32}a_{13} \\ +a_{31}a_{12}a_{23} \end{array} = \begin{array}{l} (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{21}a_{32}a_{13}) + (a_{31}a_{12}a_{23}) - \\ (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{11}a_{32}a_{23}) - (a_{21}a_{12}a_{33}) \end{array}$$

Concepto de menor, que se denota M_{ij}

El menor M_{ij} de una matriz A es la submatriz que resulta de quitar el renglón i y la columna j

Dada A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & a_{in} \\ a_{n1} \cdot & a_{nj} & \cdot\ a_{nn} \end{bmatrix}$ el menor M_{ij} es $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdot\ a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & \cdots\ a_{in} \\ \cdot & & \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots\ a_{nn} \end{bmatrix}$

$$\text{Es decir. } M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdot & a_{1n} \\ a_{i-11} & \cdot & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & & a_{i+1n} \\ & & & & & \cdot \\ a_{n1} & & a_{nj-1} & a_{nj+1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ de orden (n-1x n-1)}$$

El determinante de A = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$

Ejemplo 10

Sea A= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ su determinante es. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Por el procedimiento de agregar en la parte inferior los primeros dos renglones se tiene

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (3\bullet 4\bullet 1)+(2\bullet[-1]\bullet 1)+(0\bullet 2\bullet 6)-(0\bullet 4\bullet 1)-(3\bullet[-1]\bullet 6)-(2\bullet 2\bullet 1) = \\ 12+(-2)+0-0+18-4= \\ 24 \end{array}$$

Por el procedimiento de reducir el determinante dado por los menores de un renglón o columna cualquiera y tomando por conveniencia el tercer renglón, se tiene

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (18-2)+(12-4) = 24$$

Propiedades de los determinantes

1 Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada son nulos, el determinante |A| = 0
2 Dada una matriz cuadrada A, su determinante es igual al determinante de su transpuesta
3 Si una línea (fila o columna) se multiplica por una constante k≠0, el determinante queda multiplicado por dicha constante
4 Si existen líneas (fila o columna) iguales, el determinante es nulo
5 Si a una línea (fila o columna) se le suma un múltiplo de otra línea (fila o columna) el determinante es igual al determinante de la matriz cuadrada A
6 Si una línea (fila o columna) es múltiplo de otra línea (fila o columna) el determinante es nulo
7 Dadas las matrices cuadradas A y B, el determinante de la matriz producto es igual al producto de los respectivos determinantes

VII.2 Cálculo de inversa por determinante

Dada la matriz cuadrada A de orden n

1 Se calcula su determinante
 a Si |A|= 0 A no tiene inversa
 b Si |A|≠ entonces

2 Se calcula la matriz de cofactores

$$C = [(-1)^{i+j}M_{ij}] = \begin{bmatrix} +M_{11} & (-1)^{1+j}M_{1j} & \cdots & (-1)^{1+n}M_{1n} \\ \vdots & & & \\ (-1)^{i+1}M_{i1} & (-1)^{i+j}M_{ij} & & (-1)^{i+n}M_{in} \\ & & & \\ (-1)^{n+1}M_{1j} & (-1)^{n+j}M_{nj} & & (-1)^{n+n}M_{nn} \end{bmatrix}$$

3 Se calcula la matriz adjunta, como la transpuesta de la matriz de cofactores

$$\text{Adj } A = C^t$$

4 La inversa de A es $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{Adj\ \mathbf{A}}{Det\ \mathbf{A}}$

Ejemplo 11

Sea A= $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ determinante es $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 24$

Matriz de cofactores C= $\begin{bmatrix} (-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^6\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} +\begin{matrix} 4 & 6 \\ -1 & 1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 2 & 6 \\ 0 & 1 \end{matrix} & +\begin{matrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{matrix} \\ -\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & +\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & -\begin{matrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix} \\ +\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{matrix} & -\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{matrix} & +\begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \\ 8 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjunta (A)} = C^t = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 8 \\ -2 & 3 & -16 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inversa de A} = A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 10 & -3 & 8 \\ 2 & 3 & -16 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{12}-\frac{2}{8} & \frac{10}{12}-\frac{4}{8}-\frac{1}{3} & \frac{5}{12}-\frac{6}{8}+\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{12}+\frac{2}{8} & -\frac{2}{12}+\frac{4}{8}+\frac{2}{3} & -\frac{1}{12}+\frac{6}{8}-\frac{2}{3} \\ -\frac{3}{12}+\frac{2}{8} & -\frac{2}{12}+\frac{4}{8}-\frac{1}{3} & \frac{1}{12}+\frac{6}{8}+\frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toda matriz cuadrada es invertible si su determinante es diferente de cero.

Ejercicios 7

1 Calcular la inversa por determinantes de las siguientes matrices

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2 Calcular el siguiente determinante y resolver la ecuación respectiva

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & x \\ 2 & -3 & 1 \\ 8 & -7 & x \end{vmatrix}$$

3 Dadas las matrices

$$A= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ C= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

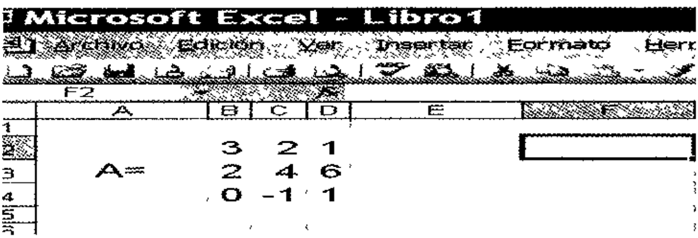
Hallar a) $[A-BC]^t$ b) $[A^tB]^{-1}$

VIII Cálculo de inversa, determinante y multiplicación de matrices en Excel

El cálculo de inversa y determinante y multiplicación de matrices se puede hacer mediante la hoja de cálculo de Excel con las siguientes funciones

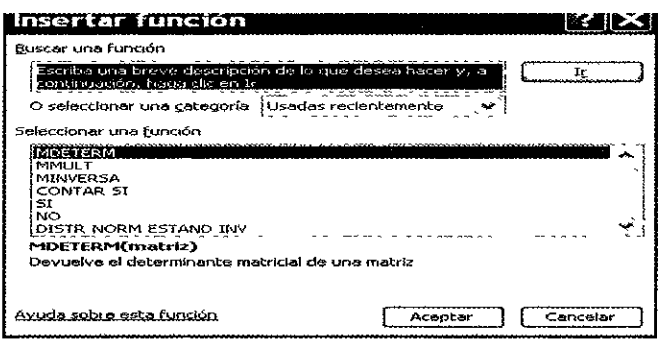
1 Cálculo de determinante con la hoja de cálculo de Excel

1 Ingresar la matriz como se muestra en esta figura

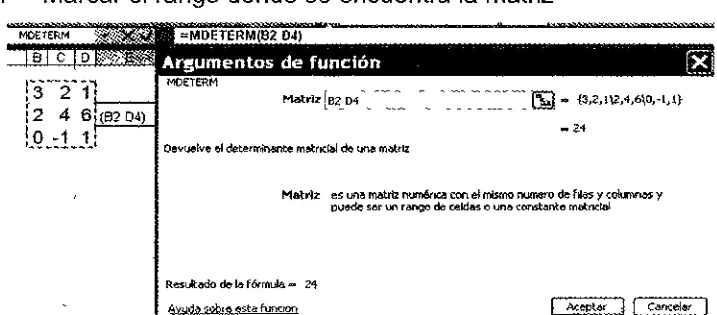


2 Elegir función 

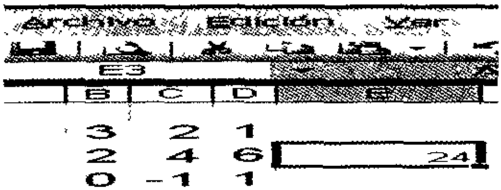
3 En la ventana de diálogo elegir la función MDETERM y aceptar



4 Marcar el rango donde se encuentra la matriz



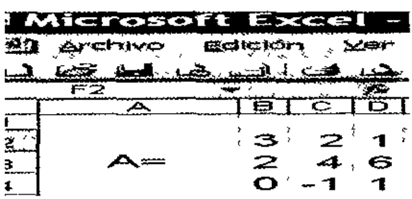
5 Aceptar-



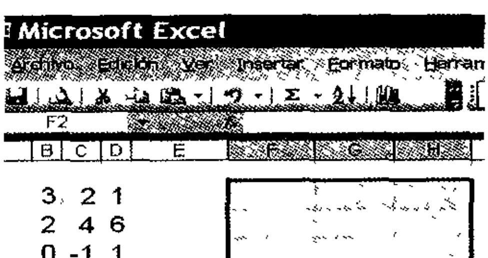
Al aceptar se obtiene el determinante en la casilla elegida
En este caso es 24, lo que implica que la matriz tiene inversa

2 Cálculo de inversa de un matriz cuadrada con la hoja de cálculo de Excel

1 Ingresar la matriz como se muestra en esta figura

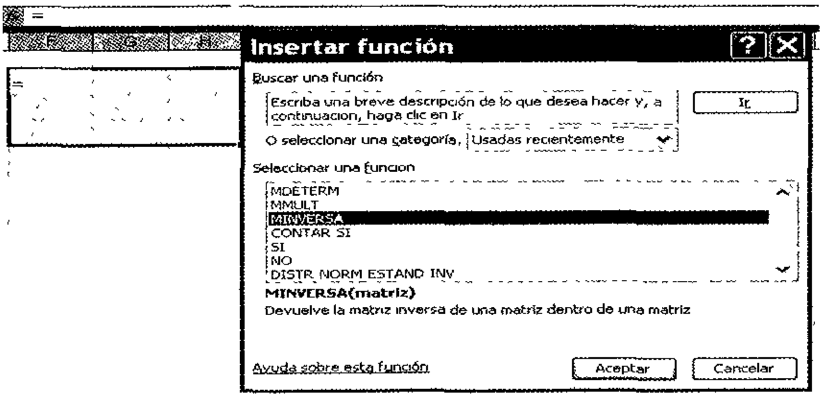


2 Marcar el rango donde se escribe la inversa

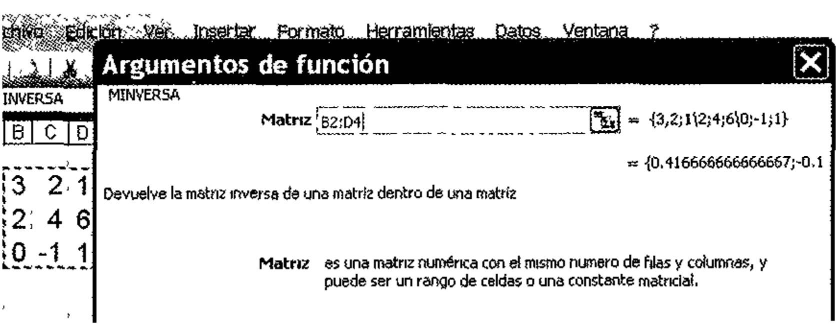


3 Ir al icono de *fx*

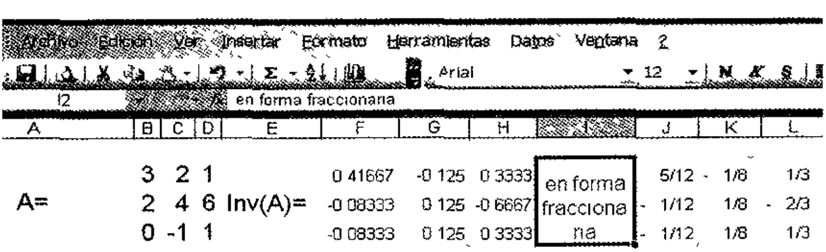
4 Elegir MINVERSA y aceptar



5 Ingresar el rango donde se encuentra la matriz



6 NO DAR ACEPTAR, oprimir la teclas **ctrl, shift, enter** **<u>simultáneamente</u>**. El resultado es



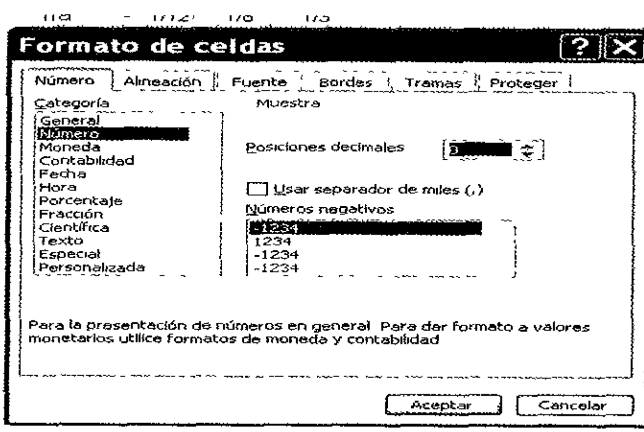
Para probar que en efecto la matriz $A^{-1}= \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ es la

inversa de A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ se calcula el producto de $A^{-1} A$ que debe ser igual
a la matriz identidad

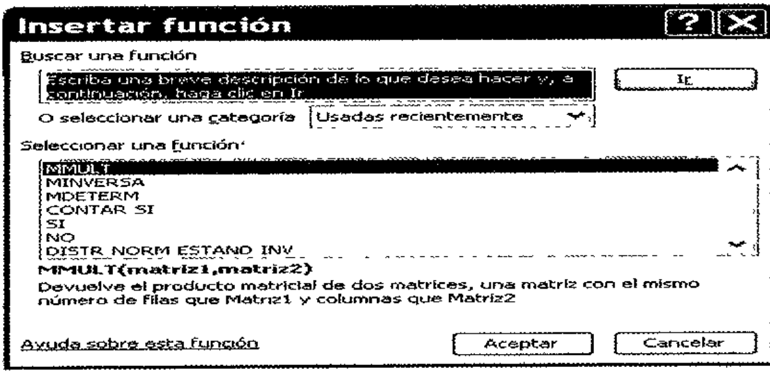
El proceso en Excel es el siguiente
Una vez obtenida la inversa

1 Marcar un rango de orden 3x3 para el producto $A^{-1} A$

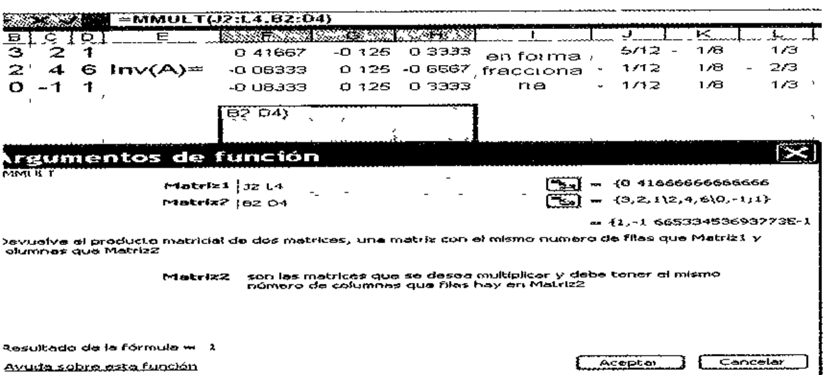
2 Ir a la ventana de *Formato de celdas* en la pestaña de *Número* elegir número y 0 posiciones decimales y acepar



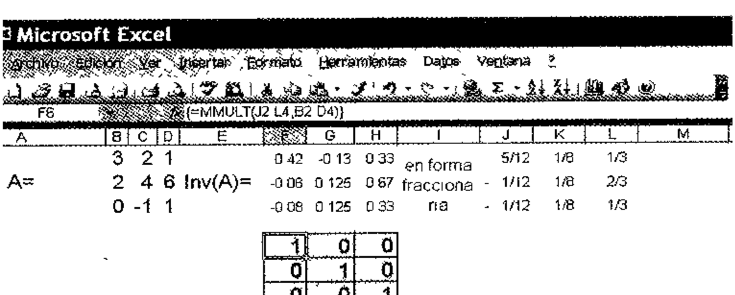
3 Ir a fx , en la ventana de Insertar función, elegir la función MMULT y aceptar



4 Ingresar los rangos de cada matriz



5 NO DAR ACEPTAR, oprimir la teclas **ctrl, shift, enter** simultáneamente
El resultado se deberá ver como sigue



Ejercicios 8

1 Calcular el determinante y la inversa, si existe, de las siguientes matrices, mediante la hoja de cálculo de Excel

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Con la ayuda de las funciones del Excel se facilita considerablemente la solución de sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas y ecuaciones, a partir de

$$Ax=b$$
$$x= A^{-1}b$$

Si A^{-1} existe

Si el determinante de A es diferente de cero entonces su inversa, A^{-1} existe
El procedimiento es

1) Ingresar los valores de la matriz A y el vector b en la hoja Excel
2) Obtener el determinante de A con la función MDETERM
   Si el determinante es un número diferente de cero
3) Calcular la inversa de A con MINVERSA
4) Obtener la solución multiplicando la matriz inversa por el vector b con la función MMULT

Ejercicios 9

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones con el método que se desee y comprobar su solución

1) $2x + 6y - 4z = 1$
$x + 3y - 2z = 4$
$2x + y - 3z = 1$

2) $x + 3y - 3z = -5$
$2x - y + z = -3$
$-6x + 3y - 3z = 4$

3) $2x - 3y + z = 2$
$3x + 2y - z = -5$
$5x - 2y + z = 1$

4) $4x - 2y + z = -4$
$x + 3y - 2z = 7$
$10x - y + z = 12$

5) $x + 2y - z - 3w = 2$
$3x + y - 2z - w = 6$
$x + y - 3z - w = -3$
$-2x - 2y + 3z + w = -9$

6) $x - 2y - 5z + w = -1$
$2x - y + z + w = 1$
$3x - 2y - 4z - 2w = 1$
$x + y + 3z - 2w = -9$

IX Problemas que se plantean como sistemas de ecuaciones lineales y se resuelven con los procedimientos del Álgebra Lineal

Como se ha reiterado a lo largo de estas notas, el objetivo del Álgebra Lineal es resolver sistemas de ecuaciones Ax=b En esta sección se muestra la utilidad del Álgebra Lineal en la aplicación a diversos campos del conocimiento Plantear problemas en la forma de sistemas de ecuaciones es un arte que se adquiere a través de ejercitar el planteamiento de problemas Una estrategia para lograrlo es leer cuidadosamente el problema, identificar y definir las variables o incógnitas, identificar los datos involucrados, las relaciones entre las variables e incógnitas que pueden ser expresadas como ecuaciones Una vez planteado el sistema se procede a resolverlo utilizando el conjunto de herramientas matriciales para la resolución de Ax= b

Problema de administración de recursos

Una comunidad de pescadores administra una granja de producción de peces de tres distintas especies La comercialización de este producto es el sustento fundamental de la comunidad y para satisfacer las necesidades alimentarias de las especies mencionadas se requieren tres tipos de alimento 15 000 unidades del producto A, 10 000 unidades del producto B y 35 000 unidades del producto C Cada pez de la especie 1 consume semanalmente en promedio 1 unidad del producto A, 1 del B y 3 del C La especie 2 consume 3 unidades del producto A, 4 del B y 1 del C Finalmente, el consumo de la especie 3 es 2 unidades del producto A, 1 del B y 5 del C Suponiendo que cada semana los peces consumen todo el alimento, determinar cuántos ejemplares de cada especie pueden ser atendidos

Los datos anteriores se representan mediante el siguiente sistema de ecuaciones lineales considerando que

a) Los consumos semanales de cada especie son lo que se conoce como coeficientes técnicos
b) Las cantidades semanales de cada producto corresponden a las constantes que se sitúan al lado derecho del sistema de ecuaciones y
c) Las variables x_1, x_2 y x_3 representan el número de peces de cada especie que pueden ser atendidas

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 15\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10\,000 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 35\,000 \end{aligned}$$

Solución

Para resolver este sistema de ecuaciones, es pertinente primero analizar la matriz de coeficientes técnicos para determinar si el sistema tiene solución única, infinidad de soluciones o no tiene solución

Así se sugiere calcular el determinante de la matriz

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

Dado que el determinante es diferente de cero, el sistema tiene solución unica La matriz A es invertible

Se puede obtener la solución resolviendo el sistema Ax=b → $x=A^{-1}b$

$$x = \begin{bmatrix} -19/9 & 13/9 & 5/9 \\ 2/9 & 1/9 & -1/9 \\ 11/9 & -8/9 & -1/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 35000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2222.22 \\ 555.55 \\ 5555.55 \end{bmatrix}$$

La solución x_1 = 2222 22 peces de la especie 1
x_2 = 555 55 peces de la especie 2
x_3 = 5555 55 peces de la especie 3

Problema de administración de recursos bis

Supóngase que otra comunidad de pescadores con especies más delicadas de peces necesita satisfacer las necesidades alimentarias de sus tres especies, para ello, también se requieren tres tipos de alimento 25 000 unidades del producto A, 20 000 unidades del producto B y 55 000 unidades del producto C Cada pez de la especie 1 consume semanalmente en promedio 1 unidad del producto A, 1 del B y 2 del C La especie 2 consume 3 unidades del producto A, 4 del B y 5 del C Finalmente, el consumo de la especie 3 es 2 unidades del producto A, 1 del B y 5 del C

Si cada semana los peces consumen todo el alimento, determinar la cantidad de cada especie que puede ser atendida

El sistema de ecuaciones que plantea la situación es

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + 1x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

Solución

De la misma manera que en el problema anterior, se sugiere como primera etapa de solución calcular el determinante de la matriz

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Dado que el determinante es igual a cero el sistema puede tener infinidad de soluciones o no tener solución La matriz A no es invertible.

Para obtener la solución se puede utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\hat{R}_1 = R_1 \\ \hat{R}_2 = R_2 - \hat{R}_1 \\ \hat{R}_3 = R_3 - 2\hat{R}_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\hat{R}_2 = R_2 \\ \hat{R}_1 = R_1 - \hat{R}_2 \\ \hat{R}_3 = R_3 + \hat{R}_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Este resultado indica que el sistema tiene una infinidad de soluciones

Si se escribe el sistema resultante para obtener los respectivos valores posibles para cada variable

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 5x_3 &= 40\,000 \\ x_2 - \ x_3 &= -5\,000 \end{aligned}$$

de donde $x_1 = 40\,000 - 5x_3$ y $x_2 = -5\,000 + x_3$

Si x_3 se elige arbitrariamente se tendrá un conjunto infinito de soluciones

Sin embargo, hay una restricción extra $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$
Entonces de $x_2 = -5\,000 + x_3 \geq 0 \rightarrow x_3 \geq 5000$ y
$x_1 = 40\,000 - 5x_3 \geq 0 \rightarrow x_3 \leq 8\,000$
por lo que $5000 \leq x_3 \leq 8\,000$
la solución es
$x_1 = 40\,000 - 5x_3$, $x_2 = -5\,000 + x_3$ y $5000 \leq x_3 \leq 8\,000$
Así, si $x_3 = 5000$ $x_1 = 15\,000$ y $x_2 = 10\,000$
Si $x_3 = 8000$ $x_1 = 0$ y $x_2 = 3\,000$

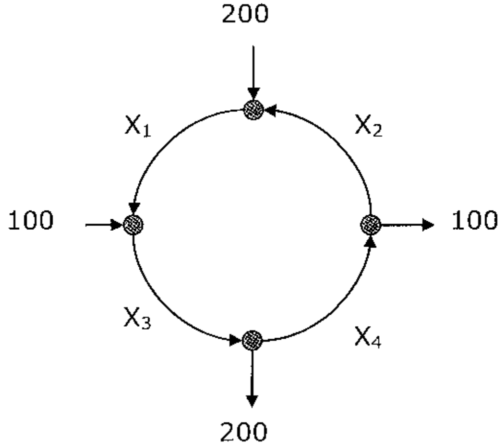
<u>**Ejercicios 10**</u> Problemas de planteamiento y resolución

1 Para el desarrollo de sus actividades una empresaria requiere comprar libras esterlinas, marcos y yenes En un año salió al extranjero en tres ocasiones, en su primer viaje cambió 2550 dólares a los siguientes tipos de cambio 0 6 libras est /dólar, 1 6 marcos/dólar y 100 yenes/dólar En su segunda salida, con 2840 dólares compró sus divisas a 0 5 libras est /dólar, 1 2 marcos/dólar y 125 yenes/dólar Finalmente, con 2,800 dólares cambió su dinero a 0 6 libras est /dólar, 1 2 marcos/dólar y 100 yenes/ dólar Determinar los montos de libras esterlinas, marcos y yenes que pudo llevar

2 Una inversionista le dice a su corredor de bolsa que todos sus acciones son de tres compañías ICA, TELEVISA y FEMSA, que hace dos días el precio de las acciones bajó a 300, pero ayer aumentó a 650 El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de ICA bajó un peso por acción y el precio de las de TELEVISA bajó 1 5, pero que el precio de FEMSA subió 0 5 También recuerda que ayer el precio de las acciones de ICA subió 1 5 por acción, las de TELEVISA bajó 5 por acción y las de FEMSA subió 1 Demuestre que el corredor no tiene suficiente información para calcular el número de acciones que posee el inversionista en cada compañía, pero que si ella dice que tiene 150 acciones de FEMSA, el corredor puede calcular el número de acciones que tiene en ICA y en TELEVISA

IX.1 Problemas de flujos

La siguiente gráfica representa la confluencia de dos avenidas en una glorieta y en él se indica el número de vehículos que cada hora pasan por cuatro puntos (nodos) clave Expresar la información en un sistema de ecuaciones lineales, resolverlo e indicar el flujo vehicular si se supone $x_4 = 0$ y 100



En cada nodo se determina una ecuación que satisface la siguiente igualdad

Lo que entra = lo que sale

Nodo 1 $x_2 + 200 = x_1$
Nodo 2 $x_1 + 100 = x_3$
Nodo 3 $x_3 = 200 + x_4$
Nodo 4 $x_4 = 100 + x_2$

Estas ecuaciones dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 \quad\quad\quad &= -200 \\ x_1 \quad - x_3 \quad &= -100 \\ x_3 - x_4 &= 200 \\ -x_2 \quad + x_4 &= 100 \end{aligned}$$

Escrito en la forma Ax= b

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} -200 \\ -100 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema, primero se analiza la matriz A
Como det(A) = 0 la matriz no es invertible y el sistema no tiene solución única, puede tener infinidad de soluciones o no tener solución
El método apropiado para resolver el sistema es el de eliminación Gauss - Jordan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -200 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right] \xrightarrow[\hat{R}_2=R_2-\hat{R}_1]{\hat{R}_1=-R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\hat{R}_4=R_4+\hat{R}_2]{\hat{R}_1=R_1+\hat{R}_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -200 \end{array}\right] \xrightarrow[\hat{R}_4=R_4+\hat{R}_3]{\hat{R}_1=R_1+\hat{R}_3,\ \hat{R}_2=R_2+\hat{R}_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema reducido es

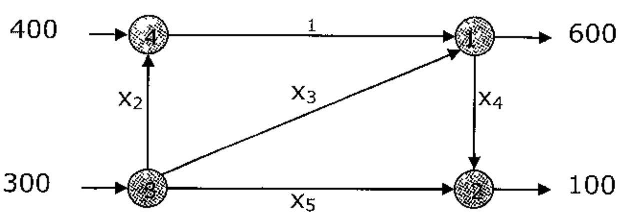
$$\begin{array}{rcl} x_1 \qquad\qquad - x_4 & = & 100 \\ x_2 \qquad - x_4 & = & -100 \\ x_3 - x_4 & = & 200 \end{array}$$

Este sistema tiene infinidad de soluciones $\begin{array}{l} x_1 = \ \ 100 + x_4 \\ x_2 = -100 + x_4 \\ x_3 = \ \ 200 + x_4 \end{array}$

De la ecuación 2, $x_2 = -100 + x_4$ dado que $x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 \geq 100$

Si $x_4 = 100$, entonces $x_1 = 200$, $\quad x_2 = 0 \quad$ y $\quad x_3 = 300$

Una red de abastecimiento de agua en miles de m^3 por hora, con cuatro conexiones, se representa por la siguiente gráfica



Hallar el sistema de ecuaciones respectivo y determinar el comportamiento

de la red suponiendo que x3 = 0, x5=100 y que x3=x5= 100
Cada nodo o conexión de la red satisface las siguientes ecuaciones
Nodo 1 $x_1 + x_3 = 600 - x_4$
Nodo 2 $x_4 + x_5 = 100$
Nodo 3 $300 = x_2 + x_3 + x_5$
Nodo 4 $x_2 + 400 = x_1$

Estas ecuaciones dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 600 \\ & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 100 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 300 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & & & = & 400 \end{array}$$

Si $x_3 = 0$, $x_5=100$, el sistema se reduce a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_4 & = & 600 \\ & & & & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 200 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 400 \end{array}$$

De donde $x_1 = 600$; $x_2 = 200$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ y $x_5 = 100$

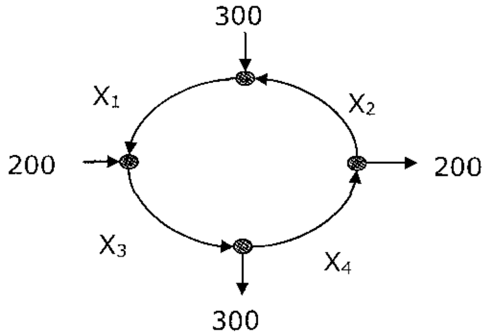
Si x3 = x5=100, el sistema se reduce a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_4 & = & 500 \\ & & & & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 100 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 400 \end{array}$$

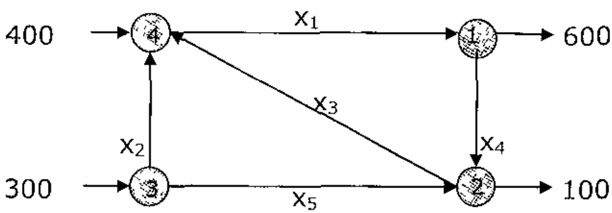
De donde $x_1 = 500$, $x_2 = 100$ $x_3 = 100$ $x_4 = 0$ y $x_5 = 100$

Ejercicios 11 Problemas de flujos

1 La siguiente gráfica representa la confluencia de dos avenidas en una glorieta y en ella se indica el número de vehículos que pasan cada hora por cuatro puntos (nodos) clave Expresar la información en un sistema de ecuaciones lineales, resolverlo e indicar el flujo vehicular si se supone $x_4 = 0$ y 100



2 Una red de abastecimiento de agua en miles de m^3 por hora, con cuatro conexiones, se representa por la siguiente gráfica



Hallar el sistema de ecuaciones respectivo y determinar el comportamiento de la red suponiendo que $x_3 = 0$, $x_5=100$ y que $x_3=x_5= 100$

IX.2 Modelo de insumo producto de Leontief

Wassily Leontief desarrolló un modelo para el análisis económico de las relaciones intersectoriales de una economía Ganó el premio Nobel de economía en 1973 por la publicación de su libro
Input-Output análisis

Este modelo considera las demandas intersectoriales y externas por sector y la producción de cada uno de ellos en una economía
Por ejemplo, la tabla española de 1954 de insumo producto consta de 8 sectores

1 Producción agraria y pesca
2 Industria extractiva
3 Industria metálica
4 Otras industrias manufactureras
5 Edificación y obras públicas

6 Agua, gas y electricidad
7 Comercio y transporte
8 Otros servicios

Cada una de las industrias tiene una cierta producción anual y cada una requiere de las otras una cantidad para su propia producción, además, existe la demanda externa por cada industria

El modelo toma el siguiente sistema de ecuaciones a partir de

Demanda intersectorial + demanda externa = producción total

$a_{11} x_1+a_{12}x_2+ \quad +a_{1n} x_n +y_1=x_1$
demanda total=producción total sector 1
$a_{21} x_1+a_{22}x_2+ \quad +a_{2n} x_n +y_2=x_2$
demanda total=producción total sector 2

$a_{n1} x_1+a_{n2}x_2+ \quad +a_{nn} x_n +y_n=x_n$
demanda total=produccion total sector n

Donde $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ son los coeficientes tecnológicos y significan que la cantidad necesaria por unidad de producción que la industria j necesita de la industria i
y_i es la demanda externa de la industria i
x_i es la producción de la industria i

De forma matricial se tiene

Ax+Y=x de donde
Y = x-Ax es decir
y = (I-A)x lo que implica
$\mathbf{x = (I-A)^{-1}Y}$

Ejemplo 12

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20 respectivamente, y que la matriz de coeficientes técnicos es la siguiente

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0\ 2 & 0\ 5 & 0\ 15 \\ 0\ 4 & 0\ 1 & 0\ 3 \\ 0\ 25 & 0\ 5 & 0\ 15 \end{bmatrix}$$

Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda

Para resolverlo se obtiene la solución de **x= (I-A)$^{-1}$y**

$$\mathbf{x}=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.2&0.5&0.15\\0.4&0.1&0.3\\0.25&0.5&0.15\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}10\\25\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&-0.5&-0.15\\-0.4&0.9&-0.3\\-0.25&-0.5&0.85\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}10\\25\\20\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2.78595696&2.26500566&1.29105323\\1.8799547&2.91053228&1.3590034\\1.92525481&2.37825595&2.35560589\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\25\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}110.305776\\118.742922\\125.81065\end{bmatrix}$$

Solución la producción necesaria para satisfacer la demanda total es

$$x_1 = 110,\ x_2 = 119 \text{ y } x3 = 126$$

__Ejercicios 12__ Problemas del modelo de insumo producto de Leontief

1 Una economía con cuatro sectores tiene las siguientes matrices de demanda interna **A** y la de demanda externa **Y** Determinar los niveles de producción de cada sector que se requiere para satisfacer las demandas

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}001&.039&.011&.007\\074&104&011&048\\.007&025&358&025\\12&.123&173&234\end{bmatrix}\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}23.527\\63\,985\\41\,271\\53\,108\end{bmatrix}$$

2 Dada una economía de cuatro sectores cuyas matrices de demanda interna **A** y de demanda externa **Y** son

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}170&004&0&029\\003&295&018&002\\025&173&460&007\\348&037&021&403\end{bmatrix}\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}99\,640\\75\,548\\14\,444\\33\,501\end{bmatrix}$$

Determinar los niveles de producción de cada sector que se requieren para satisfacer las demandas

IX.3 Procesos de Markov

Como se ilustró en la sección III 3, los procesos de Markov se utilizan para modelar situaciones que describen estados separados, de manera que el sistema esté en un solo estado cada vez

En esta sección se ilustra la forma de obtener las probabilidades de estado estacionario

Probabilidades de estado estacionario

La condición de estado estacionario es que no depende del estado inicial.

Cuando t tiende a infinito, se encuentran las probabilidades de estado estacionario con la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\sum_i S_i = 1$$

$$S=SP \quad \text{con} \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

Cálculo de probabilidades de estado estacionario para un sistema de dos estados:

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$[S_1 \quad S_2] = [S_1 \quad S_2]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$ Como $p_{11} + p_{12} = 1$ y $p_{21} + p_{22} = 1$

El sistema por resolver es

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$[S_1 \quad S_2] = [S_1 \quad S_2]\begin{bmatrix} (1-p_{12}) & p_{12} \\ p_{21} & (1-p_{21}) \end{bmatrix}$$

Para S_1

$S_1 = (1-p_{12})\, S_1 + p_{21} S_2$ *Como* $S_1 + S_2 = 1$

entonces

$S_1 = (1-p_{12})S_1 + p_{21}(1-S_1) \Rightarrow$
$S_1 = S_1 - p_{12}S_1 + p_{21} - p_{21}S_1 \Rightarrow$
$-p_{12}S_1 + p_{21} - p_{21}S_1 = 0$

De donde.

$\boxed{S_1 = \dfrac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}}$ y como $S_2 = 1 - S_1 \Rightarrow$ $\boxed{S_2 = \dfrac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}}$

Ejemplo Encontrar las probabilidades de estado S_1 y S_2 de la siguiente matriz de transicion

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Del sistema $\begin{cases} S_1 + S_2 = 1 \\ [S_1 \quad S_2] = [S_1 \quad S_2]\begin{bmatrix} (1-p_{12}) & p_{12} \\ p_{21} & (1-p_{21}) \end{bmatrix} \end{cases}$

se tiene $\begin{cases} S_1 + S_2 = 1 \\ [S_1 \quad S_2] = [S_1 \quad S_2]\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{cases}$

$\begin{cases} S_1 + S_2 = 1 \\ S_1 = {}^1\!/_4 S_1 + {}^1\!/_2 S_2 \\ S_2 = {}^3\!/_4 S_1 + {}^1\!/_2 S_2 \end{cases}$ $\begin{cases} S_1 + S_2 = 1 \\ {}^3\!/_4 S_1 - {}^1\!/_2 S_2 = 0 \\ -{}^3\!/_4 S_1 + {}^1\!/_2 S_2 = 0 \end{cases}$ de la ecuacion 1 $\begin{matrix} S_2 = 1 - S_1 \\ {}^3\!/_4 S_1 - {}^1\!/_2 (1 - S_1) = 0 \end{matrix}$

$${}^5\!/_4 S_1 = {}^1\!/_2 \Rightarrow S_1 = {}^2\!/_5 \Rightarrow S_2 = {}^3\!/_5$$

Las probabilidades de estacionarias son **2/5** y **3/5** para los estados 1 y 2 respectivamente

Si se hacen los cálculos a partir de las expresiones que resultaron de la resolución del sistema

$$S_1 + S_2 = 1$$

$$[S_1 \quad S_2] = [S_1 \quad S_2]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad S_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \quad S_2 = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}$$

Con la matriz de transición $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$S_1 = \frac{1/2}{3/4 + 1/2} = 2/5 \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{3/4}{3/4 + 1/2} = 3/5 \text{ como se esperaba}$$

Ejemplo 13 Problemas de procesos de Markov de dos estados

Hay dos tipos de bicicletas, A y B, que pueden alquilarse Tienen distintas probabilidades de cambiar de un estado de ajuste a uno de desajuste, como se indica a continuación

Probabilidades de transición de la máquina A

De \ a	ajustada	desajustada
ajustada	9	.1
desajustada	.6	.4

Probabilidades de transición de la máquina B

De \ a	ajustada	desajustada
ajustada	.8	.2
desajustada	.7	.3

a Obtén las probabilidades de estado estacionario para cada máquina ¿cuál sería la más deseable alquilar?

Sea S_1 la probabilidad de que la bicicleta se encuentre en el estado de ajustada y S_2 la probabilidad de que la bicicleta se encuentre en el estado de desajustada

Con $S_1 = \dfrac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}$ $S_2 = \dfrac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}$

Las probabilidades de estado estacionario para la bicicleta tipo A son

$S_1 = \dfrac{0\,6}{0\,1 + 0\,6} = \dfrac{6}{7} = 0.86$ y $S_2 = \dfrac{0\,1}{0\,1 + 0\,6} = \dfrac{1}{7} = 0.14$

Las probabilidades de estado estacionario para la bicicleta tipo B son

$S_1 = \dfrac{0\,7}{0\,2 + 07} = \dfrac{7}{9} = 0.78$ y $S_2 = \dfrac{0\,2}{0\,2 + 0\,7} = \dfrac{2}{9} = 0.22$

Por lo tanto, la decisión es alquilar la bicicleta tipo A porque la probabilidad de estar ajustada es de 0 86 que es mayor a 0 78, probabilidad de que la bicicleta tipo B este ajustada

Ejercicios 13 Problemas de Markov con dos estados

1 Para las siguientes matrices de transición, encuentre las probabilidades de estado estacionario

a) $\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

2 La siguiente tabla muestra las probabilidades de transición del comportamiento de los clientes de una tienda con respecto al pago de sus facturas mensuales

De \ a	pagó	no pagó
pagó	.9	.1
no pagó	.6	.4

a ¿Cuáles son las probabilidades de estado estacionario?
b ¿El director debería cancelar el crédito de los clientes que no han pagado? ¿por qué?

3 Los administradores de una compañía refresquera consideran que la probabilidad de que un cliente compre su bebida Reycola, o el refresco estrella de la competencia, Maxcola, se basa en la compra más reciente del cliente Supóngase que las probabilidades de transición son

De \ a	Reycola	Maxcola
Reycola	.9	.1
Maxcola	.1	.9

a Para un cliente que compró la última vez Reycola ¿cuál es la probabilidad de que el cliente compre Reycola en una segunda compra?
b ¿Cuál es la participación de mercado a largo plazo para cada uno de estos dos productos?
c Si la compañía hace una campaña publicitaria que aumentaría a 15 la probabilidad de que un cliente cambie de Maxcola a Reycola ¿cual es el efecto proyectado de la campaña publicitaria sobre las participaciones de mercado?

Cálculo de probabilidades de estado estacionario para un sistema de tres estados:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

$$[S_1 \quad S_2 \quad S_3] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

El sistema por resolver es

$S_1=p_{11}S_1+p_{21}S_2+p_{31}S_3$
$S_2=p_{12}S_1+p_{22}S_2+p_{32}S_3$
$S_3=p_{13}S_1+p_{23}S_2+p_{33}S_3$

Este sistema se resuelve tomando sólo tres de las cuatro ecuaciones y de la primera ecuación se despeja $S_3 = 1-S_1-S_2$ y se sustituye en las dos ecuaciones siguientes

$S_1=p_{11}S1+p_{21}S_2+p_{31}(1-S_1-S_2)$
$S_2=p_{12}S1+p_{22}S_2+p_{32}(1-S_1-S_2)$

Ahora se ha reducido a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por resolver

Ejemplo 14

Considera la siguiente matriz de transición de un proceso de Markov y encuentra las probabilidades de estados estacionarios

$$\begin{bmatrix} .6 & 3 & .1 \\ 7 & .2 & 1 \\ 2 & .4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = 1$$

$$[S_1 \quad S_2 \quad S_3] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3] \begin{bmatrix} .6 & .3 & 1 \\ .7 & .2 & 1 \\ .2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

El sistema por resolver es

$S_1= 6S_1+ 7S_2+ 2(1-S_1-S_2)$
$S_2= 3S_1+ 2S_2+ 4(1-S_1-S_2)$

Agrupando términos

$6S_1 - 5S_2 = 2$
$1S_1 + 1\ 2S_2 = 4$

El resultado del sistema es $S_1 = \frac{4}{7}$ $S_2 = \frac{2}{7}$ y $S_3 = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$

Para matrices de procesos de Markov con número de estados mayores de tres, el sistema se resuelve por eliminación gaussiana y sustitución hacia atrás o por eliminación Gauss Jordan
También se puede utilizar la hoja Excel para resolver el problema por medio de la inversa

Ejemplo 15

Considera la matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Encuentra las probabilidades de estado estacionario

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1$
$S_1 = 5S1 + 3S_2 + 1S_3 + 1S_4$
$S_2 = 3S1 + 4S_2 + 2S_3 + 3S_4$
$S_3 = 1S1 + 1S_2 + 6S_3 + 1S_4$
$S_4 = 1S1 + 2S_2 + 1S_3 + 5S_4$

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1$
$-.5S_1 + .3S_2 + .1S_3 + .1S_4 = 0$
$.3S_1 - .6S_2 + .2S_3 + 3S_4 = 0$
$.1S_1 + 1S_2 - 6S_3 + .1S_4 = 0$
$1S_1 + .2S_2 + .1S_3 - .5S_4 = 0$

Dado que son cinco ecuaciones con cuatro incógnitas, sólo tomamos las cuatro primeras ecuaciones

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1$
$-5S_1 + 3S_2 + 1S_3 + 1S_4 = 0$
$3S_1 - 6S_2 + 2S_3 + 3S_4 = 0$
$1S_1 + 1S_2 - 6S_3 + 1S_4 = 0$

El sistema escrito matricialmente en la forma AS=b es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y la solución es $S = A^{-1}b$

El cálculo de la inversa se puede hacer en la hoja Excel con la función MINVERSA

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0\ 34 & -1\ 25 & 0 & 0\ 36 \\ 0\ 32 & 0 & 1\ 11 & 0\ 16 \\ 0\ 14 & 0 & 0 & 1\ 43 \\ 0\ 20 & 1\ 25 & 1\ 11 & 0\ 91 \end{bmatrix} \text{ y } S = \begin{bmatrix} 0\ 34 & -1\ 25 & 0 & 0\ 36 \\ 0\ 32 & 0 & 1\ 11 & 0\ 16 \\ 0\ 14 & 0 & 0 & 1\ 43 \\ 0\ 20 & 1\ 25 & 1\ 11 & 0\ 91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ 34 \\ 0\ 32 \\ 0\ 14 \\ 0\ 20 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades estacionarias son

$$S_1 = 0\ 34 \quad S_2 = 0\ 32 \quad S_3 = 0\ 14 \quad S_4 = 0\ 20$$

<u>Ejercicios 14</u> Problemas de Markov de 3x3

1 Determinar si existen las probabilidades estacionarias de cada matriz de transición

$$\text{a. } \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{b } \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \text{c } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d } \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 La siguiente tabla contiene las probabilidades de que un director se desplace entre los tres pisos de una tienda departamental Calcula las probabilidades de estado estacionario

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} piso\ 1 & piso\ 2 & piso\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} piso\ 1 \\ piso\ 2 \\ piso\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

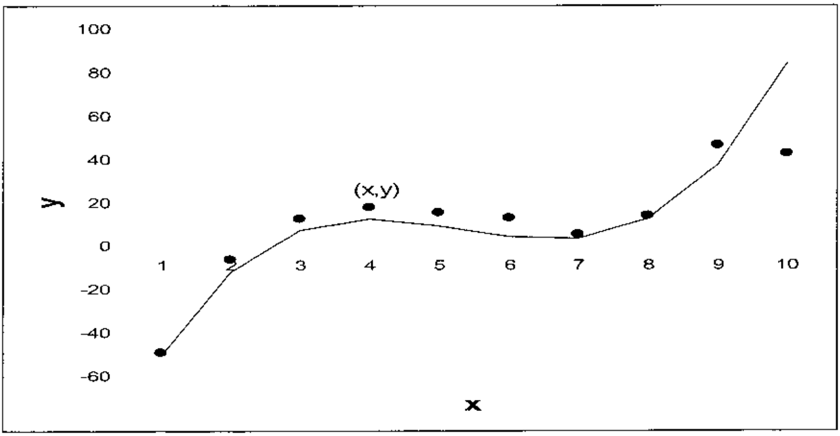
3 En el centro del DF se rentan bicicletas en tres estaciones específicas A, B, y C Los clientes devuelven las bicicletas a las estaciones con las siguientes probabilidades

$$\begin{bmatrix} Estaciones & A & B & C \\ A & 8 & 2 & 0 \\ B & 2 & 0 & 8 \\ c & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Si existen 5000 bicicletas, ¿a largo plazo cuántas habrá en cada lugar específico?

IX.4 Ajuste polinomial con la técnica de mínimos cuadrados

Dado un conjunto de puntos (pares ordenados x_i,y_i), se puede determinar un polinomio de grado 'p' que se ajuste a la trayectoria de tales puntos como se muestra en la gráfica



está dado por la ecuación

$$Y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ .. + a_{p-1}x^{p-1} + a_px^p$$

Donde para encontrar este polinomio, los coeficientes 'a' son los valores por determinar y el grado del polinomio es $p \in Z^2$

La técnica de mínimos cuadrados para determinar estos coeficientes consiste en resolver la siguiente ecuación matricial **(A^TA)x = A^Tb** en la que

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^{p-1} & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{p-1} & x_2^p \\ & & . & & & \\ & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{p-1} & x_n^p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_{p-1} \\ a_p \end{bmatrix}$$

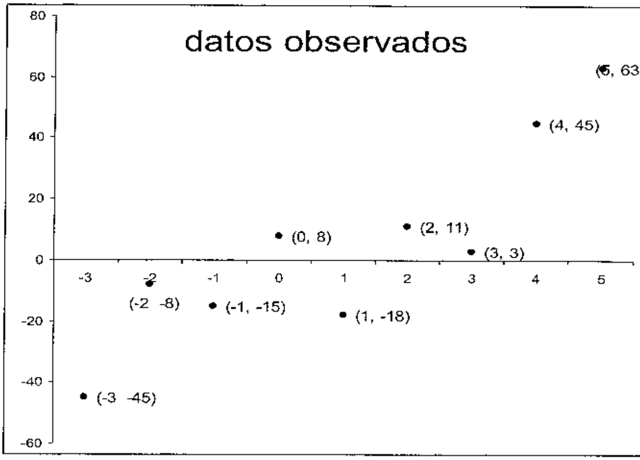
Los registros de la matriz A son potencias de 'x_i' Los elementos de la matriz b son los valores de 'y' y el contenido de la matriz x (de incógnitas) son las valores por establecer de los coeficientes 'a'
La solución de la ecuación matricial **$(A^TA)x = A^Tb$** está dada por **$(A^TA)^{-1}(A^TA)$ $x =(A^TA)^{-1} A^Tb$,**
Lo que resulta finalmente **$x =(A^TA)^{-1} A^Tb$.**

Ejemplo 16

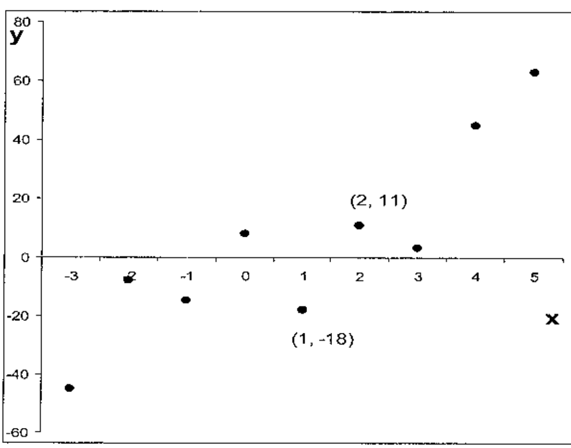
Considera el siguiente conjunto de datos observados

datos observados	
x	**y**
-3	-45
-2	-8
-1	-15
0	8
1	-18
2	11
3	3
4	45
5	63

Cuya gráfica es



Dado el comportamiento de los datos en la gráfica, se desea ajustarlos a un polinomio de grado 3



$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

De acuerdo con la técnica de mínimos cuadrados se sigue el siguiente procedimiento

1 Construir la matriz de potencias de las x, y el vector b

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 9 & -27\\ 1 & -2 & 4 & -8\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & 4 & 16 & 64\\ 1 & 5 & 25 & 125\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}-45\\ -8\\ -15\\ 8\\ -18\\ 11\\ 3\\ 45\\ 63\end{bmatrix}$$

2 Obtener $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25\\ -27 & -8 & -1 & 0 & 1 & 8 & 27 & 64 & 125\end{bmatrix}$

3 Obtener $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix}9 & 9 & 69 & 189\\ 9 & 69 & 189 & 1077\\ 69 & 189 & 1077 & 4149\\ 189 & 1077 & 4149 & 21309\end{bmatrix}$

4 Obtener la inversa de A^TA

$$\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0.3139 & -0.0465 & -0.0411 & 0.0076\\ -0.0465 & 0.0840 & 0.0120 & -0.0062\\ -0.0411 & 0.0120 & 0.0096 & -0.0021\\ 0.0076 & -0.0062 & -0.0021 & 0.0007\end{bmatrix}$$

5 Obtener como verificación $\left(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7 Obtener $\mathbf{A}^{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 44 \\ 674 \\ 1896 \\ 12200 \end{bmatrix}$

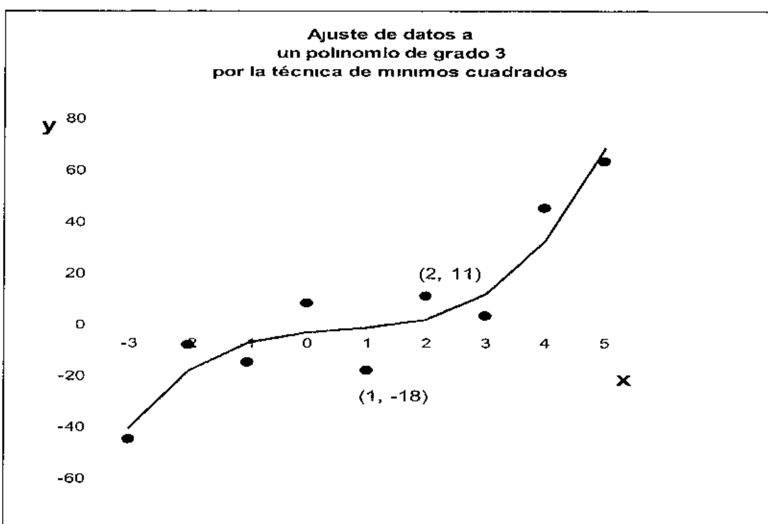
8 Obtener (ATA)-1ATb = x

$$\begin{bmatrix} 0\ 3139 & -0\ 0465 & -0\ 0411 & 0\ 0076 \\ -0\ 0465 & 0\ 0840 & 0\ 0120 & -0\ 0062 \\ -0\ 0411 & 0\ 0120 & 0.0096 & -0\ 0021 \\ 0\ 0076 & -0\ 0062 & -0\ 0021 & 0\ 0007 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 \\ 674 \\ 1896 \\ 12200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\ 106060 \\ 2\ 042087 \\ -1\ 252525 \\ 0\ 74074 \end{bmatrix}$$

Así, el polinomio es

$y = -3.11 + 2.04\,x - 1.25x^2 + .74\,x^3$

cuya gráfica es



El procedimiento anterior se puede realizar utilizando la hoja de cálculo Excel, siguiendo los mismos pasos

1 Construcción en Excel de la matriz A de potencias de x

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & x_1^p \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{p-1} & x_2^p \\ & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{p-1} & x_n^p \end{bmatrix} \quad \text{y la matriz b} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ \\ \\ y_n \end{bmatrix}$$

2 Obtener A^T con la operación TRANSPONER
3 Obtener A^TA con la operación MMULT
4 Obtener $(A^TA)^{-1}$ con la operación MINVERSA
5 Obtener como verificación $(A^TA)^{-1}(A^TA)$ con MMULT
6 Obtener A^Tb con la operación MMULT
7 Obtener $(A^TA)^{-1}A^Tb$ con la operación MMULT

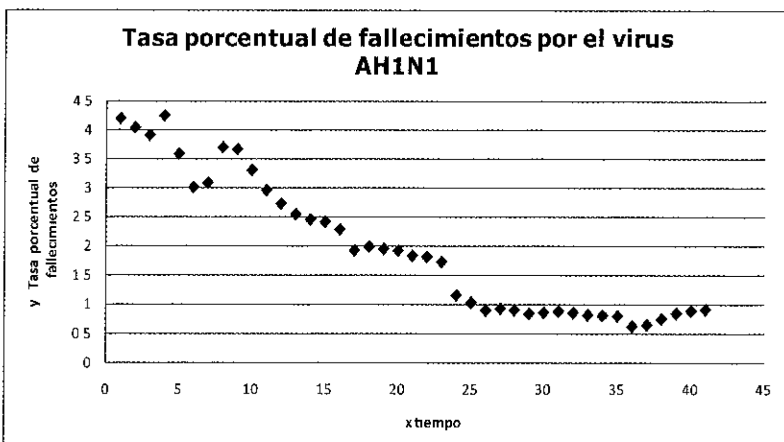
X Ajuste de datos de la epidemia del virus AH1N1 a una función exponencial con la técnica de mínimos cuadrados

Considere el siguiente conjunto de observaciones que se han realizado a partir del brote del virus AH1N1

Observación	Fecha	N° infectados	N° Fallecimientos	Tasa de fallecimientos	Tasa porcentual
1		358	15	0 0419	4 1899
2		397	16	0 0403	4.0302
3		487	19	0 0390	3.9014
4		590	25	0.0424	4 2373
5		727	26	0 0358	3 5763
6		866	26	0 0300	3 0023
7		942	29	0.0308	3 0786
8		1112	41	0 0369	3 6871
9		1204	44	0 0365	3 6545
10		1364	45	0 0330	3.2991
11		1625	48	0.0295	2 9538
12		2059	56	0 0272	2.7198
13		2282	58	0.0254	2 5416
14		2446	60	0 0245	2 4530
15		2656	64	0.0241	2 4096
16		2895	66	0 0228	2.2798
17		3646	70	0 0192	1.9199
18		3734	74	0 0198	1 9818
19	21/05/09	4008	78	0 0195	1 9461
20		4174	80	0 0192	1 9166
21		4541	83	0.0183	1 8278
22	28/05/09	4910	89	0 0181	1.8126
23	11/06/09	6241	108	0 0173	1 7305
24	03/07/09	10262	119	0 0116	1 1596
25	09/07/09	11699	121	0.0103	1 0343
26		14229	128	0 0090	0 8996
27		14861	138	0 0093	0 9286
28	23/07/09	15383	139	0 0090	0 9036
29	19/08/09	19470	164	0.0084	0.8423
30	20/08/09	19712	170	0 0086	0.8624

31	02/09/09	21857	193	0 0088	0 8830
32		25214	217	0 0086	0 8606
33		26556	218	0 0082	0.8209
34		27085	220	0.0081	0 8123
35		27660	222	0 0080	0 8026
36		40880	257	0 0063	0 6287
37	26/10/09	50234	328	0 0065	0 6529
38	09/11/09	59762	452	0 0076	0 7563
39	22/11/09	63565	540	0 0085	0 8495
40		64322	573	0 0089	0.8908
41	26/11/09	64585	589	0.0091	0 9120

Sı lo que ınteresa es conocer el comportamıento de la tasa porcentual de los fallecımıentos, la técnıca de mínımos cuadrados, es la apropıada Prımero observamos el comportamıento gráficamente



Una funcıón que podría representar este tıpo de comportamıento es y= a b^x

Donde y es la tasa porcentual de fallecımıentos

x es el perıodo de observacıón
a y b son las constantes a determınar

Dado que la técnıca de mínımos cuadrados ajusta datos a polınomıos, es decır, funcıón lıneal y no exponencıal como la que se está proponiendo, entonces se procede a linearizar la función mediante la obtención del log

log y = log a + x log b

La matriz A será $[1,x_j]$, b=$[\log y_i]$, y_i es la tasa porcentual de fallecimiento en la observación i

Supóngase que sólo se toman las primeras 20 observaciones

1) Se introduce la matriz **A** y el vector **b** en Excel

A =

1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
1	7
1	8
1	9
1	10
1	11
1	12
1	13
1	14
1	15
1	16
1	17
1	18
1	19
1	20

b =

b=log(porcentaje)
0 622208232
0 605329476
0 59122464
0 627087997
0 553438937
0 477455456
0 488347095
0 566679069
0 56282619
0 518398143
0 470387872
0 43453168
0 405112353
0 389694798
0 381951903
0 357895367
0 283281376
0 297057406
0 28916689
0 282537542

2) $\mathbf{A}^T$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

3) $A^TA \begin{vmatrix} 20 & 210 \\ 210 & 2870 \end{vmatrix}$

4) $(A^TA)^{-1} = \begin{vmatrix} 0\ 215789 & -0\ 01579 \\ -0\ 01579 & 0\ 001504 \end{vmatrix}$

5) $(A^TA)^{-1}\ (A^TA) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

6) $A^Tb\ = \begin{vmatrix} 9\ 204612424 \\ 83\ 82227727 \end{vmatrix}$

7) $x= (A^TA)^{-1}\ A^Tb = \begin{vmatrix} 0\ 6627 \\ -0\ 019 \end{vmatrix}$

$$X = \begin{matrix} \log a & = & 0\ 6627 \\ \log b & = & -0\ 019 \end{matrix}$$

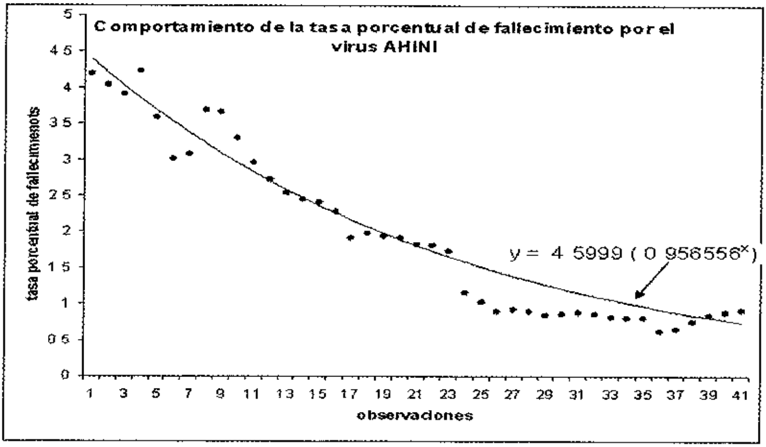
Y por lo tanto $a = 10^{\ 6627} = 4\ 599904649$
$b = 10^{-0\ 019} = 0\ 956560739$

La función de la tasa porcentual de los fallecimientos es
$y = 4.5999\ (\ 0.956556^x)$

Observación	Tasa porcentual de fallecimientos por el virus AH1N1	Tasa porcentual calculada $y=4.56(0.9565^X)$
1	4.1899441	4 400088189
2	4.0302267	4 208951608
3	3 9014374	4.026117859
4	4 2372881	3.851226273
5	3.5763411	3.683931849
6	3.0023095	3.523904571
7	3.0785563	3.370828759
8	3 6870504	3.224402448
9	3.654485	3 084336787
10	3 2991202	2 950355476
11	2.9538462	2.822194213
12	2 7197669	2 699600181

13	2 5416301	2 582331543
14	2.4529845	2.470156969
15	2 4096386	2 362855175
16	2 2797927	2 260214491
17	1.9199122	2.162032443
18	1.981789	2.068115351
19	01/01/00	1.978277948
20	1 9166267	1 892343015
21	1.8277912	1.810141032
22	1 8126273	1 731509843
23	1 7304919	1 656294335
24	1.159618	1 584346132
25	1.0342764	1.515523306
26	0.8995713	1.449690094
27	0.9286051	1 386716627
28	0.9035949	1.326478681
29	0.8423215	1 268857427
30	0.8624188	1.213739197
31	0 8830123	1.161015263
32	0 860633	1 110581618
33	0.8209068	1 062338773
34	0.8122577	1.016191561
35	0.802603	0 97204895
36	0.6286693	0.929823862
37	0.6529442	0 889433
38	0 7563335	0 850796688
39	0 8495241	0 813838708
40	0.8908305	0.778486156
41	0.9119765	0.744669292

Cuya gráfica es



<u>Ejercicios 15</u> Problemas de ajuste de datos a funciones por mínimos cuadrados

1 Un distribuidor de automóviles presentó el modelo más reciente de una marca muy reconocida Sus ingresos brutos semanales a partir de que el automóvil entró en exhibición fueron

Semanas en exhibición del modelo nuevo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ingresos semanales (millones de dólares)	0 8	0 5	3 2	4 3	4 0	2 2	3 0	3 8	4.7	4 3

Con el supuesto de que la tendencia de los ingresos se mantendrá, hallar las ecuaciones de un polinomio de grado 1y uno de grado 3 que describan el comportamiento, estimar con uno y otro a cuánto habrían ascendido los ingresos a las 6 y 8 semanas de exhibición del automóvil, cuales serían los ingresos esperados al cabo de 13 semanas e indicar cuál de estas dos últimas estimaciones estaría más apegada a la realidad

2 El número de adherentes a una campaña a favor de una cierta causa se registró cada dos meses a partir de su inicio y se obtuvieron los siguientes datos

Tiempo transcurrido (meses)	Número de adherentes (decenas)
2	25
4	120
6	150
8	185
10	207
12	190

Hallar la ecuación de un polinomio de segundo grado que describa la trayectoria y si ésta continúa, estimar cuales serían los nuevos seguidores al cabo de los siguientes dos trimestres

3 En un año de fuertes cambios organizacionales, un pequeño consorcio registró utilidades netas del orden de 6 millones de dólares Se dispone de las cifras logradas en siete y dos bimestres anteriores al año de los cambios y de las alcanzadas en tres, cuatro y seis bimestres después Si el comportamiento observado se mantiene, encontrar una ecuación de segundo grado mediante la cual sea posible estimar, transcurridos ocho y diez bimestres del año "cero", los correspondientes beneficios netos. Los datos son

Bimestres (anteriores/posteriores)	Utilidades netas (millones de dólares)
-7	3
-2	5
0	6
3	7
4	5
6	4

Biblioografia

Grossman Stanley I *Algebra Lineal*[1], Grupo Editorial Iberoamérica, Mc Graw Hill, México, 2004, (5ª ed) ISBN 968-422-984-4

Howard Antón, *Algebra Lineal*[2], Editorial Limusa Wiley, México, 2004, (3ª ed) ISBN 968-18-6317-8

Nakos George y David Joyner, *Algebra Lineal*[3], Editorial Thomson - México 1999 ISBN 9687529865, ISBN 13 9789687529868

Larson Roland, *Introducción al Álgebra Lineal*, Editorial Limusa Editores, México, 2000 ISBN 9789681848866

Seymour Lipschutz , *Algebra Lineal*, Mc Graw-Hill México, 2010 (2ª ed)

1 Existencia en libreria Existencia en biblioteca Clave QA184G718A

2 Existencia en biblioteca Clave QA251A518

3 Existencia en biblioteca Clave QA184N3518

Se imprimieron 500 ejemplares
La tipografía, formación e impresion
estuvieron a cargo
Impresora Cometa
Cerrada Michoacán No 4 Col Paraje Zacatepec
México, D F Mayo de 2011
impresoracometa@prodigy net mx